Hans Walser, [20070903a]

Unterteilung der Fibonacci-Folge

Gesucht ist eine Folge mit der Rekursion

$$z_{n+2} = az_{n+1} + bz_n$$

so dass die Folgenglieder mit geraden Indizes die Fibonacci-Folge bilden.

Aus dem Ansatz $z_{n+2} = az_{n+1} + bz_n$ folgt:

$$z_{n+3} = az_{n+2} + bz_{n+1}$$

$$z_{n+4} = az_{n+3} + bz_{n+2} = a^2 z_{n+2} + abz_{n+1} + +bz_{n+2}$$

Wegen $az_{n+1} = z_{n+2} - bz_n$ erhalten wir schließlich:

$$z_{n+4} = az_{n+3} + bz_{n+2} = a^2 z_{n+2} + b\left(z_{n+2} - bz_n\right) + bz_{n+2} = \left(a^2 + 2b\right) z_{n+2} - b^2 z_n$$

Dies sollte mit $z_{n+4} = z_{n+2} + z_n$ übereinstimmen. Koeffizientenvergleich liefert:

$$a^2 + 2b = 1$$

$$-b^2 = 1$$

Wir erhalten die komplexen Lösungen $b = \mathrm{i}$ und $a = (1 - 2\mathrm{i})^{\frac{1}{2}}$ und damit die Rekursion:

$$z_{n+2} = (1 - 2\mathrm{i})^{\frac{1}{2}} z_{n+1} + \mathrm{i} z_n$$

Für die Startwerte muss gelten: $z_0 = 0$; z_1 ist noch unbekannt. Wegen $z_2 = 1$ erhalten wir:

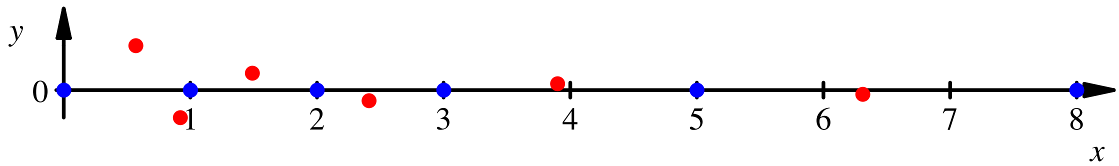
$$z_1 = (1 - 2\mathrm{i})^{-\frac{1}{2}}$$

Kontrolle mit MuPAD:

```
z[0] = 0
z[1] = 0.56886448 + 0.35157758*I
z[2] = 1
z[3] = 0.92044207 - 0.2172869*I
z[4] = 1
z[5] = 1.4893065 + 0.13429069*I
z[6] = 2
z[7] = 2.4097486 - 0.082996209*I
z[8] = 3
z[9] = 3.8990552 + 0.051294478*I
z[10] = 5
z[11] = 6.3088038 - 0.031701731*I
z[12] = 8
```

In der Teilfolge mit den ungeraden Indizes streben die Imaginärteile gegen Null und die Realteile gegen das geometrische Mittel der beiden benachbarten Folgenglieder mit geraden Indizes.

Die Grafik zeigt blau die Folgenglieder mit geraden Indizes und rot die Folgenglieder mit ungeraden Indizes.



In der Gaußschen Ebene