Hans Walser, [20180913]

Umfang- und flächengleiche Dreiecke

Anregung: Thomas Jahre, Chemnitz

1 Problemstellung

Gibt es zwei nicht kongruente Dreiecke, welche den gleichen Umfang und den gleichen Flächeninhalt haben?

2 Lösung

Die beiden Dreiecke

	a	b	c
Dreieck 1	20	24	16
Dreieck 2	22	23	15

Tab. 1: Die beiden Lösungen

haben denselben Umfang U und denselben Flächeninhalt F:

$$U = 60, \quad F = 60\sqrt{7} \approx 158.7451 \tag{1}$$

Die beiden Dreiecke sind aber nicht kongruent (Abb. 1).

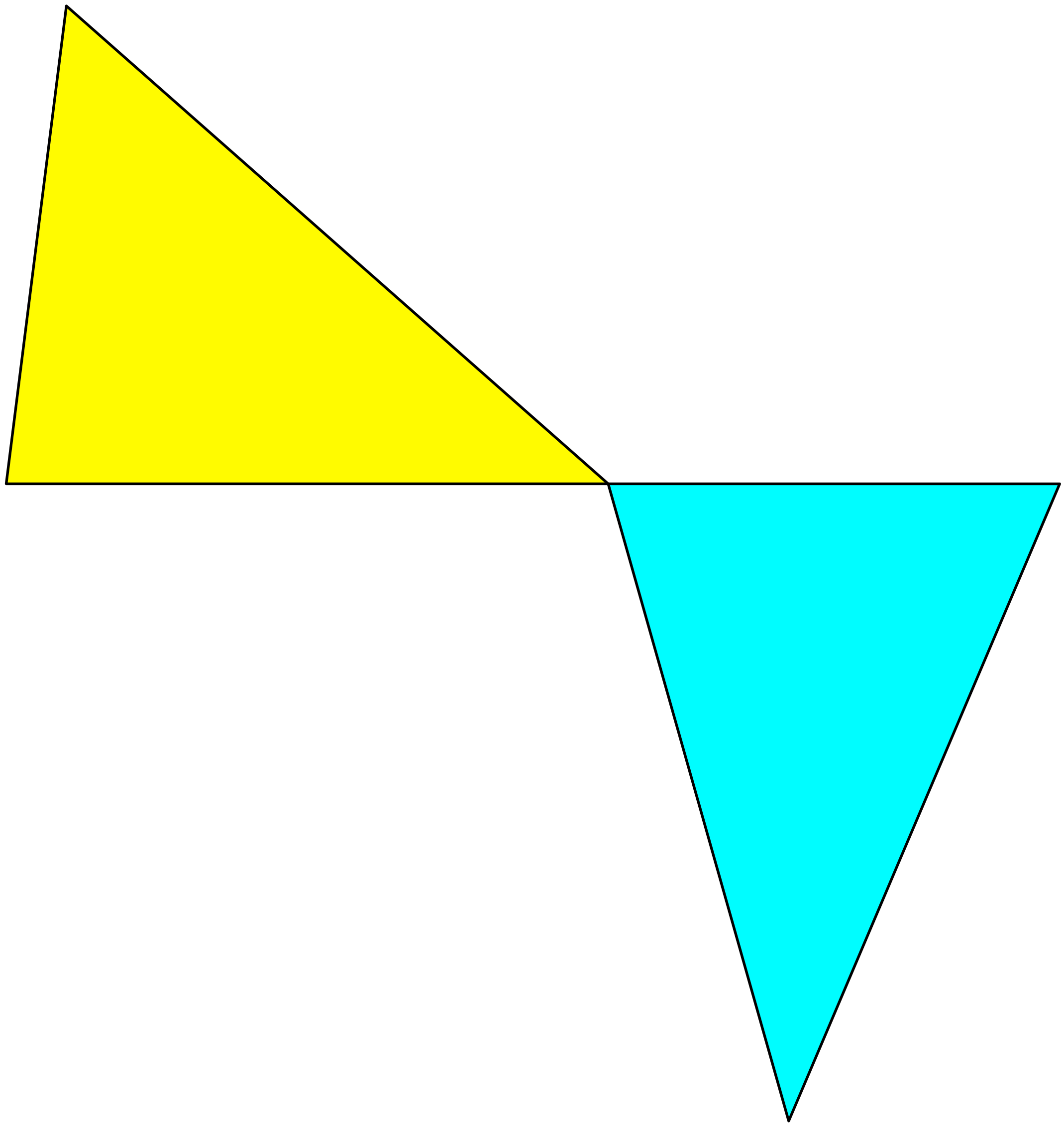

Abb. 1: Die beiden Dreiecke

3 Visualisierung der beiden Gleichheiten

3.1 Umfanggleichheit

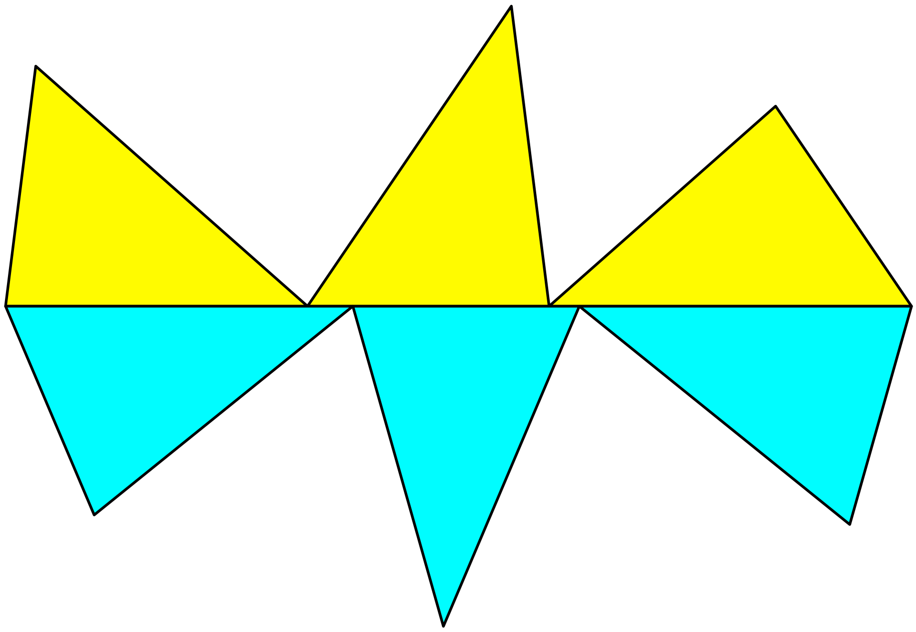

Abb. 2: Gleiche Umfänge

3.2 Flächengleichheit

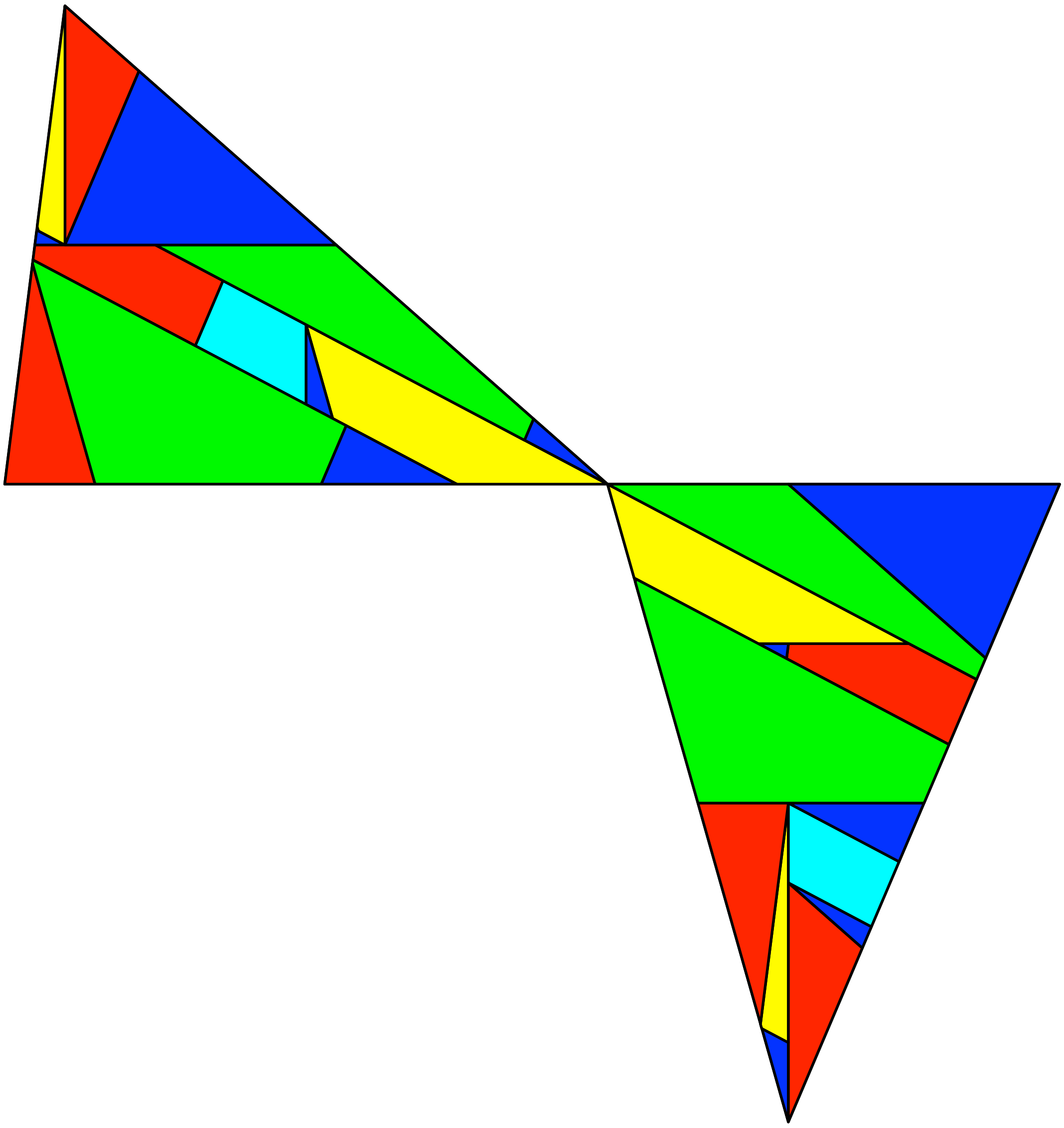

Abb. 3: Gleiche Flächeninhalte

4 Rechnerische Beweise

Zu einem Dreieck mit den Seiten *a, b, c* ist

$$U = a + b + c \tag{2}$$

und:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \qquad (3)$$

Wenn wir die Daten der Tabelle 1 einsetzen, erhalten wir für beide Dreiecke dieselben Werte (1).

5 Wie kommt man auf so etwas?

Zu gegebenem Umfang U und Flächeninhalt F bilden (2) und (3) ein Gleichungssystem für die Unbekannten a, b, c. Da wir drei Unbekannte, aber nur zwei Gleichungen haben, ist das System unterbestimmt. Wir können also für eine der drei Unbekannten einen Wert wählen und mit (2) und (3) die beiden anderen ausrechnen. Es gibt daher zu gegebenem U und F unendliche viele Lösungen.

Ich habe die ganzzahligen Lösungen der Tabelle 1 auf einer Bahnfahrt durch Probieren gefunden.

6 Spezielle Dreiecke

Für spezielle Dreiecke erhalten wir eine weitere Gleichung:

Gleichschenkliges Dreieck:

$$a = b \qquad (4)$$

Rechtwinkliges Dreieck:

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (5)$$

In diesen Fällen haben wir keinen Freiheitsgrad mehr. Es gibt im Prinzip nur eine Lösung. Anders formuliert: Gleichschenklige Dreiecke oder rechtwinklige Dreiecke mit demselben Umfang und demselben Flächeninhalt sind kongruent.

Für sehr spezielle Dreiecke erhalten wir sogar zwei weitere Gleichungen:

Gleichseitiges Dreieck:

$$a = b, \quad b = c \qquad (6)$$

Rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck:

$$a = b, \quad a^2 + b^2 = c^2 \tag{7}$$

In diesen Fällen haben wir insgesamt ein überbestimmtes Gleichungssystem und in der Regel keine Lösung.