Hans Walser, [20181217]

Trigonometrische Identität

1 Die Identität

Für eine Ungerade Zahl $m = 2n + 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k}{m}\pi\right) = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{m}\pi\right) = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{2m}\right) \tag{1}$$

Detailliert:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k}{m}\pi\right) = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{m}\pi\right) \tag{1a}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k}{m}\pi\right) = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{2m}\right) \tag{1b}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{m}\pi\right) = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi}{2m}\right) \tag{1c}$$

2 Die Reißverschlusssymmetrie

Die Abbildungen 1 und 2 illustrieren die Beziehung (1a) exemplarisch für $m = 9$, also für $n = 4$, im Einheitskreis und an der Sinuskurve.

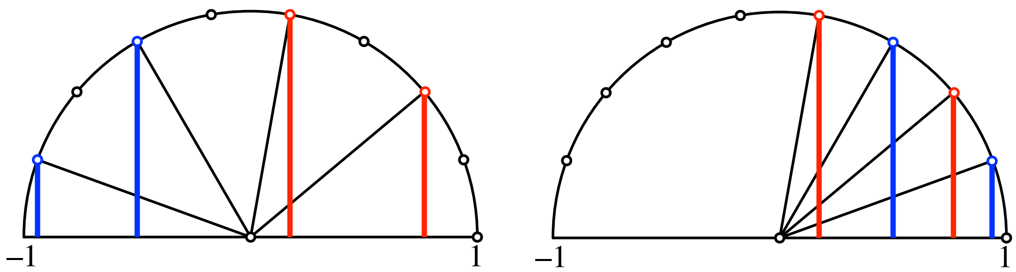

Abb. 1: Im Einheitskreis

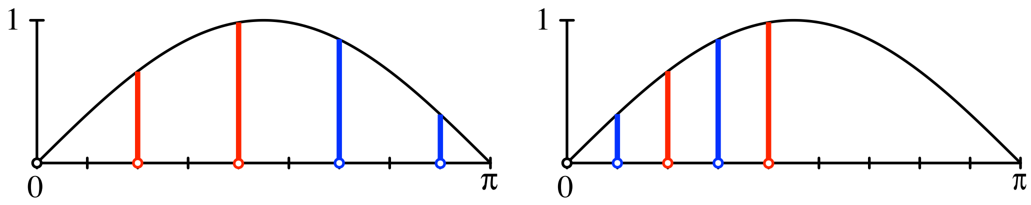

Abb. 2: Sinuskurve

Wir haben eine Reißverschlusssymmetrie (Abb. 3). Gegenüberliegende Teile passen in die Lücken.

Abb. 3: Reißverschluss

3 Geometrischer Zugang

Wir beweisen die Beziehung (1b). In einem Winkelfeld mit dem Scheitelwinkel $\frac{\pi}{m}$ tragen wir die Einheitsstrecke vom Scheitel ausgehend abwechslungsweise nach oben und nach unten ab. Die Abbildung 4 illustriert das Vorgehen für $n = 4$, also $m = 9$. Nach Walser (1988) kommen wir nach m Schritten zum Scheitelpunkt zurück.

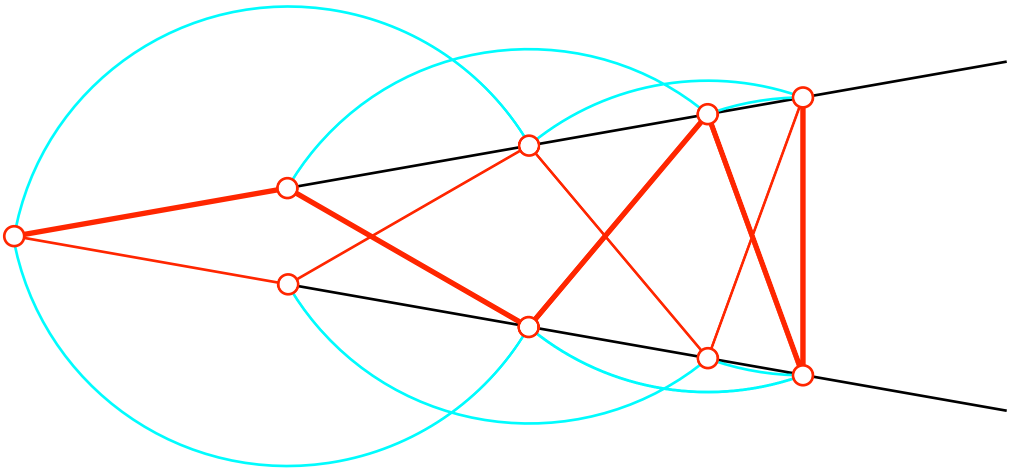

Abb. 4: Abtragen der Einheitsstrecke

Die dabei auftretenden Winkel sind Vielfache von $\frac{\pi}{m}$ (Abb. 5). Aus Symmetriegründen ist steht die $n+$ erste Strecke rechtwinklig zur Winkelhalbierenden des Winkelfeldes.

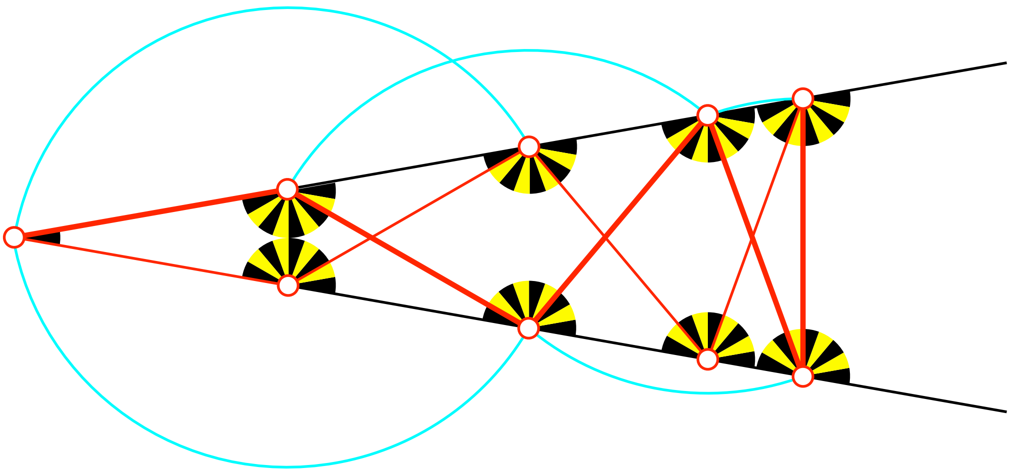

Abb. 5: Winkel

Wir können n gleichschenklige Dreiecke der Schenkellänge 1 einpassen (Abb. 6).

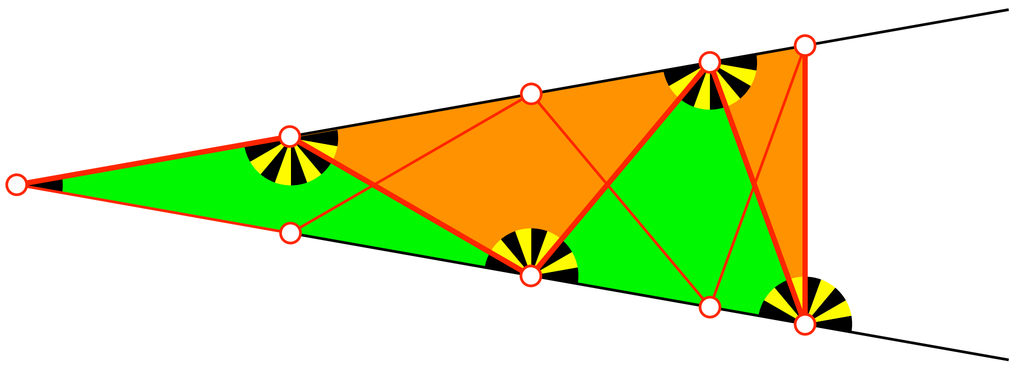

Abb. 6: Gleichschenklige Dreiecke

Diese gleichschenkligen Dreiecke haben vom Scheitelpunkt ausgehend der Reihe nach die Spitzenwinkel:

$$\pi - \tfrac{2}{m}\pi, \pi - \tfrac{4}{m}\pi, \pi - \tfrac{6}{m}\pi, \ldots \tag{2}$$

Also:

$$\pi - \tfrac{2k}{m}\pi, \quad k = 1,\ldots,n \tag{3}$$

Für die Flächeninhalte dieser Dreiecke erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\sin\left(\pi - \tfrac{2k}{m}\pi\right) = \tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{2k}{m}\pi\right), \quad n = 1,\ldots,n \tag{4}$$

Die Summe der Flächeninhalte ist also:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\tfrac{2k}{m}\pi\right) \tag{5}$$

Diese Dreiecke bilden zusammen ein größeres gleichschenkliges Dreieck mit dem Spitzenwinkel $\frac{\pi}{m}$ und der Basislänge 1. Es hat den Flächeninhalt:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\cot\left(\tfrac{\pi}{2m}\right) \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt (1b).

4 Formaler Beweis

Wir zeigen (1c).
Zunächst eine Hilfsformel, eine Art Additionstheorem:

$$2\sin(x)\sin(y)=\cos(x-y)-\cos(x+y) \tag{7}$$

Beweis der Hilfsformel mit dem Additionstheorem für den Kosinus:

$$\begin{aligned}&\cos(x-y)-\cos(x+x)=\\&=\big(\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)\big)-\big(\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\big)\\&=2\sin(x)\sin(y)\end{aligned} \tag{8}$$

Wir schreiben die Formel (1c) in der Form:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\tfrac{k}{m}\pi\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)} \quad\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}2\sin\left(\tfrac{\pi}{2m}\right)\sin\left(\tfrac{k}{m}\pi\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{2m}\right) \tag{9}$$

Wegen (8) kann das in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}2\sin\left(\tfrac{k}{m}\pi\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2m}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\tfrac{k}{m}\pi-\tfrac{\pi}{2m}\right)-\cos\left(\tfrac{k}{m}\pi+\tfrac{\pi}{2m}\right)\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\tfrac{2k-1}{2m}\pi\right)-\cos\left(\tfrac{2k+1}{2m}\pi\right)\right)\\&=\left(\cos\left(\tfrac{1}{2m}\pi\right)-\cos\left(\tfrac{3}{2m}\pi\right)\right)+\left(\cos\left(\tfrac{3}{2m}\pi\right)-\cos\left(\tfrac{5}{2m}\pi\right)\right)+\cdots+\left(\cos\left(\tfrac{2n-1}{2m}\pi\right)-\cos\left(\tfrac{2n+1}{2m}\pi\right)\right)\\&=\cos\left(\tfrac{1}{2m}\pi\right)+0+0+\cdots+0+\cos\left(\tfrac{2n+1}{2m}\pi\right)\end{aligned} \tag{10}$$

Wegen $m = 2n + 1$ haben wir im letzten Summanden einen rechten Winkel. Dieser Summand verschwindet also auch. Es bleibt nur der erste Summand übrig. Damit sind (9) und (1c) bewiesen.

Literatur

Walser, Hans (1988): Ein Schließungssatz der Elementargeometrie. *Elemente der Mathematik* (43), 1988. S. 161-169.