Hans Walser, [20171009]

Thaleskurven

1 Worum geht es?

In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck mit der üblichen Beschriftung (Abb. 1) gilt auf Grund der Kathetensätze:

$$p = \frac{a^2}{c} \quad , \quad q = \frac{b^2}{c} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich:

$$p : q = a^2 : b^2 \tag{2}$$

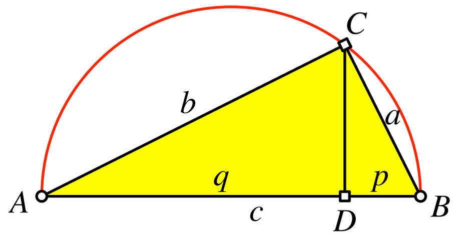

Abb. 1: Rechtwinkliges Dreieck

Wird der Thaleskreis abgeändert gemäß Abbildung 2, so gilt:

$$p : q = a^3 : b^3 \tag{3}$$

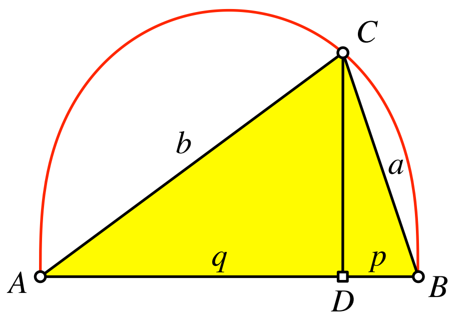

Abb. 2: Modifikation

Das Dreieck ist jetzt natürlich nicht mehr rechtwinklig.

Wie muss die rote Kurve in der Abbildung 2 beschaffen sein, damit für jedes C auf dieser Kurve die Beziehung (3) gilt?

Wie muss die Kurve beschaffen sein, damit für gegebenes k die Beziehung gilt:

$$p:q=a^k:b^k \tag{4}$$

2 Rechnerischer Beweis

Wir beweisen zunächst (2) rein rechnerisch. Dazu verwenden wir ein Koordinatensystem mit $A(-1,0)$ und $B(1,0)$. Der Thaleskreis ist dann der Graph der Funktion:

$$y=f(x)=\sqrt{1-x^2} \quad , \quad x\in[-1,1] \tag{5}$$

Der Punkt C habe die Koordinaten:

$$C(x,y)=C\left(x,\sqrt{1-x^2}\right) \tag{6}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned} a^2&=(1-x)^2+y^2=(1-x)^2+1-x^2=2-2x=2(1-x)\\ b^2&=(1+x)^2+y^2=(1+x)^2+1-x^2=2+2x=2(1+x)\end{aligned} \tag{7}$$

und:

$$p=1-x \quad , \quad q=1+x \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt:

$$a^2:b^2=2(1-x):2(1+x)=(1-x):(1+x)=p:q \tag{9}$$

Damit ist (2) nachgewiesen.

3 Allgemeiner Fall

Es sei k gegeben.

Wir suchen eine Funktion $y=f(x)$, deren Graph als Kurve gemäß Abbildung 2 oder einer Verallgemeinerung davon dienen kann.
Es ist dann:

$$C(x,y)=C(x,f(x)) \tag{10}$$

Weiter ist:

$$a=\left((1-x)^2+f^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad b=\left((1+x)^2+f^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

Weiter gilt nach wie vor (8). Die Bedingung (4) lautet demzufolge:

$$(1-x):(1+x)\overset{!}{=}\left((1-x)^2+f^2(x)\right)^{\frac{k}{2}}:\left((1+x)^2+f^2(x)\right)^{\frac{k}{2}} \tag{12}$$

Wir können (12) nach $f(x)$ auflösen und erhalten:

$$y=f(x)=\left(\frac{(1-x)^2(1+x)^{\frac{2}{k}}-(1+x)^2(1-x)^{\frac{2}{k}}}{(1-x)^{\frac{2}{k}}-(1+x)^{\frac{2}{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{13}$$

4 Bilder und Bemerkungen

Die folgenden Abbildungen zeigend die Kurven für verschiedene Werte von k.

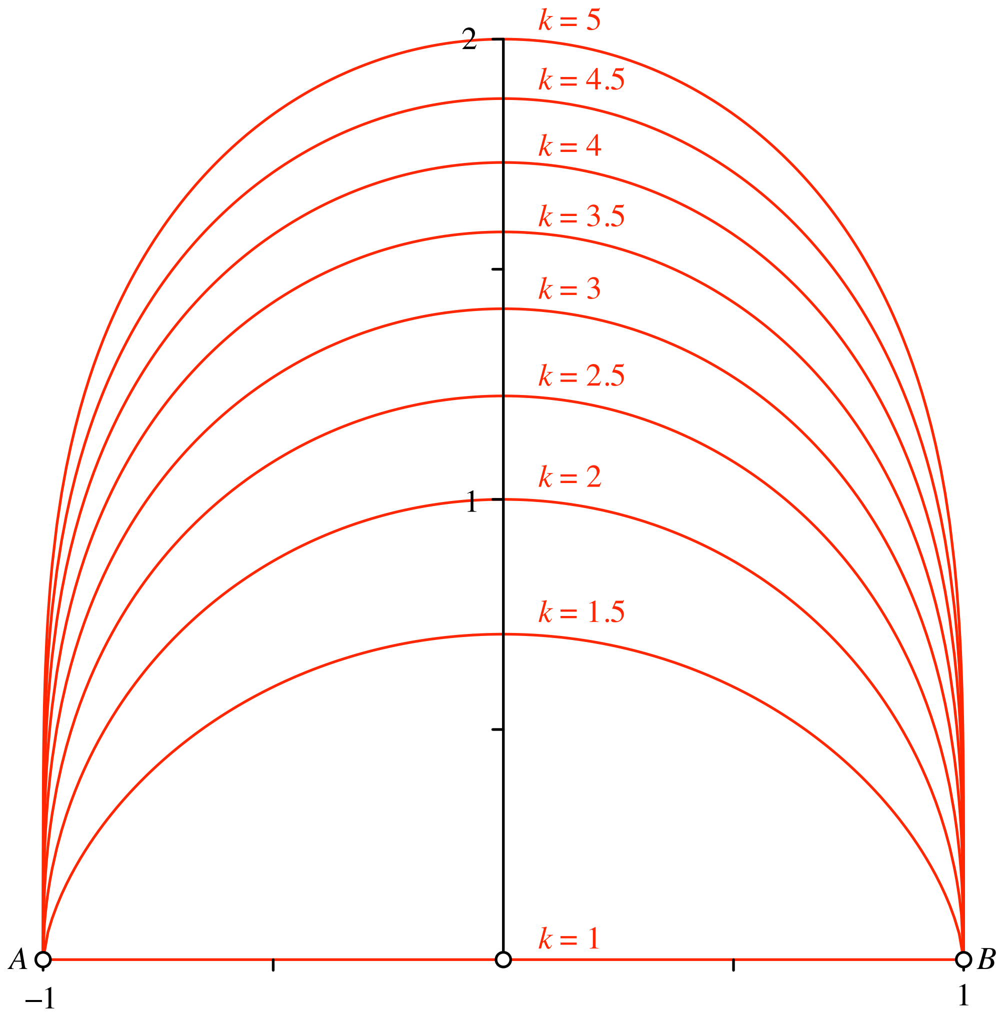

Abb. 3: Kurven

Für $k = 1$ ergibt sich die Strecke AB.

Für $k = 2$ ergibt sich der übliche Thaleskreis.

Für $x = 0$ ist (13) nicht definiert (Division durch null). Hingegen gilt (mit CAS validiert):

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{k-1} \tag{14}$$

Die Kurven sind keine Ellipsen. In der Abbildung 4 ist rot die Kurve für $k = 3$ eingezeichnet und blau der mit dem Faktor $\sqrt{2}$ gestreckte Thaleskreis, also die Ellipse.

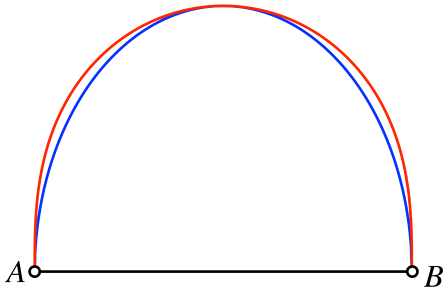

Abb. 4: Vergleich mit Ellipse