Hans Walser, [20180604], [20180727]

Thaleskreis an Ellipse und Hyperbel

1 Ellipse

1.1 Thaleskreis

Die Menge der Punkte, von denen aus eine Ellipse unter einem rechten Winkel gesehen wird, ist ein Kreis (Abb. 1).

Bei einer Ellipse mit den Halbachsen a und b hat dieser Kreis den Radius r:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

Die *Thaleskurve* einer Ellipse ist also ein Kreis. Die Ecken der „Umrechtecke" einer Ellipse liegen auf einem Kreis.

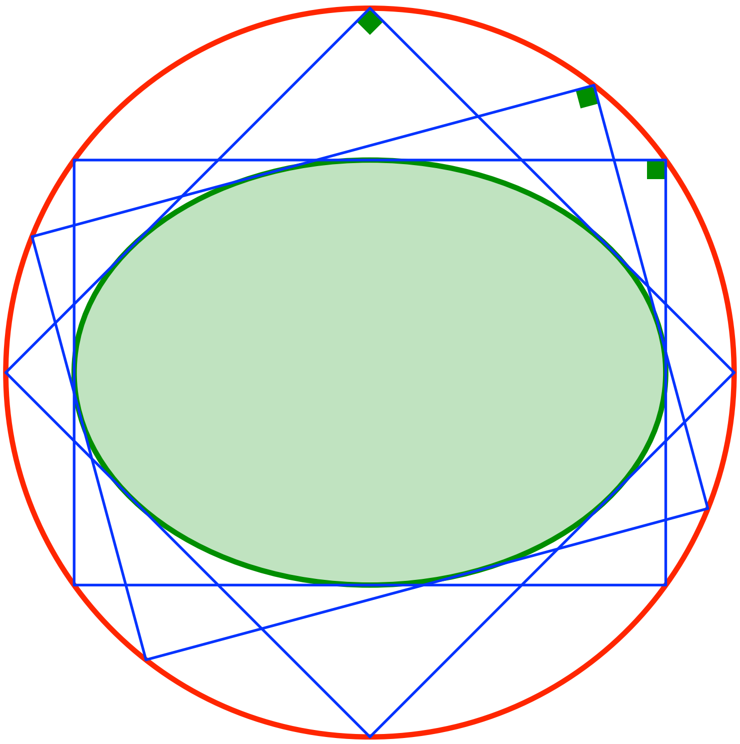
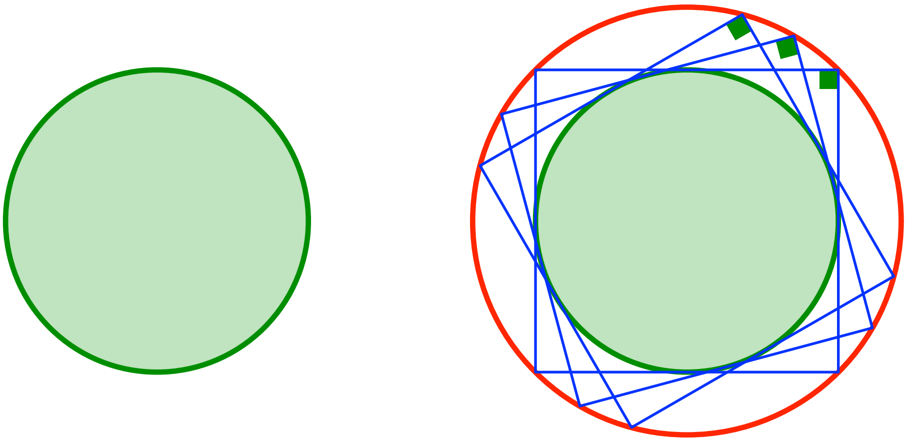


Abb. 1: Ellipse und Kreis

1.2 Sonderfälle

a) Für $b = 0$ wird die Ellipse zu einer Strecke und wir erhalten den gewöhnlichen Thaleskreis.

b) Für $a = b$ ist die Ellipse ein Kreis (Abb. 2a). Der Thaleskreis ist trivial (Abb. 2b). Er hat den Radius $a\sqrt{2}$.



a) b)

Abb. 2: Sonderfall des Kreises

1.3 Beweise

Wir zeigen zwei rechnerische Beweise

1.3.1 Beweis mit Parameterdarstellung

Für die Ellipse verwenden wir die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] \tag{2}$$

1.3.1.1 Tangenten

Die Tangente mit Berührpunktparameter t_1 hat die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}_1(s_1) = \vec{x}(t_1) + s_1\dot{\vec{x}}(t_1) = \begin{bmatrix} a\cos(t_1) \\ b\sin(t_1) \end{bmatrix} + s_1 \begin{bmatrix} -a\sin(t_1) \\ b\cos(t_1) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Entsprechend die Tangente mit Berührpunktparameter t_2:

$$\vec{x}_2(s_2) = \vec{x}(t_2) + s_2\dot{\vec{x}}(t_2) = \begin{bmatrix} a\cos(t_2) \\ b\sin(t_2) \end{bmatrix} + s_2\begin{bmatrix} -a\sin(t_2) \\ b\cos(t_2) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Für den Schnittpunkt S erhalten wir die Koordinaten:

$$S = (x_S, y_S) = \left(\frac{a(\sin(t_2) - \sin(t_1))}{\cos(t_1)\sin(t_2) - \sin(t_1)\cos(t_2)}, \frac{b(-\cos(t_2) + \cos(t_1))}{\cos(t_1)\sin(t_2) - \sin(t_1)\cos(t_2)} \right) \tag{5}$$

1.3.1.2 Orthogonale Tangenten

Die Orthogonalitätsbedingung $\dot{\vec{x}}(t_1) \perp \dot{\vec{x}}(t_2)$ führt auf:

$$\dot{\vec{x}}(t_1) \cdot \dot{\vec{x}}(t_2) = a^2 \sin(t_1)\sin(t_2) + b^2 \cos(t_1)\cos(t_2) \stackrel{!}{=} 0 \tag{6}$$

Daraus ergibt sich:

$$t_2 = \arctan\left(-\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{\tan(t_1)} \right) \tag{7}$$

Wir setzen dies in (5) ein und prüfen, ob dann:

$$x_S^2 + y_S^2 = a^2 + b^2 \tag{8}$$

Dies ist tatsächlich der Fall (mit CAS nachgeprüft).
Somit liegt der Schnittpunkt S auf dem Thaleskreis.

1.3.2 Erster Beweis mit quadratischen Gleichungen

Wir beginnen mit dem Punkt P auf dem Thaleskreis:

$$P = (x_P, y_P) = \left(x_P, \sqrt{a^2 + b^2 - x_P^2} \right) \tag{9}$$

Die x-Koordinate des Punktes P ist also ein freier Parameter. Der Punkt P liegt auf dem oberen Halbkreis, dies ist aus Symmetriegründen aber keine Beschränkung der Allgemeinheit.

Weiter hat die Ellipse die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{10}$$

Wir nehmen das Geradenbüschel durch P:

$$m=\frac{y-y_P}{x-x_P} \tag{11}$$

Dabei ist m die Steigung der Büschelgeraden.
Wir schneiden die Ellipse mit dem Geradenbüschel, das heißt wir lösen das aus (10) und (11) bestehende quadratische Gleichungssystem nach (x,y) auf.

Wir erhalten die beiden x-Werte:

$$\begin{aligned} x_1&=-\frac{\left(-am^2x_P+\sqrt{a^2+b^2-x_P^2}\,am-\sqrt{a^2b^2m^2-b^2m^2x_P^2+2\sqrt{a^2+b^2-x_P^2}\,b^2mx_P-a^2b^2+b^2x_p^2}\right)a}{a^2m^2+b^2}\\ x_2&=-\frac{\left(-am^2x_P+\sqrt{a^2+b^2-x_P^2}\,am+\sqrt{a^2b^2m^2-b^2m^2x_P^2+2\sqrt{a^2+b^2-x_P^2}\,b^2mx_P-a^2b^2+b^2x_p^2}\right)a}{a^2m^2+b^2}\end{aligned} \tag{12}$$

Für eine berührende Tangente sollten wir aber genau eine Lösung haben. Daher muss der Radikand in der großen Wurzel null sein. Dies ergibt eine quadratische Gleichung für m:

$$a^2b^2m^2-b^2m^2x_P^2+2\sqrt{a^2+b^2-x_P^2}\,b^2mx_P-a^2b^2+b^2x_p^2=0 \tag{13}$$

Wir erhalten die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} m_1&=-\frac{\sqrt{a^2+b^2-x_P^2}\,x_P-\sqrt{a^4-a^2x_P^2+b^2x_P^2}}{a^2-x_P^2}\\ m_2&=-\frac{\sqrt{a^2+b^2-x_P^2}\,x_P+\sqrt{a^4-a^2x_P^2+b^2x_P^2}}{a^2-x_P^2}\end{aligned} \tag{14}$$

Dies sind die Steigungen der beiden Tangenten von P an die Ellipse. Wegen

$$m_1m_2=-1 \tag{15}$$

sind die beiden Tangenten orthogonal.

1.3.3 Zweiter Beweis mit quadratischen Gleichungen

Wir arbeiten mit der Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{16}$$

Der Punkt P habe die Koordinaten $P\left(x_P, y_P\right)$.

Nun machen wir folgende Fallunterscheidung:

1.3.3.1 Senkrechte Tangente

Wenn $x_P = \pm a$ ist haben wir eine senkrechte Tangente, welche die Ellipse in einem der beiden spitzen Scheitel berührt. Eine dazu orthogonale Tangente berührt in einem der beiden stumpfen Scheitel, also ist $y_P = \pm b$. Der Punkt P erfüllt die Bedingung:

$$x_P^2 + y_P^2 = a^2 + b^2 \tag{17}$$

Er liegt also auf dem Kreis mit dem Radius r gemäß (1).

1.3.3.2 Keine senkrechte Tangente

In diesem Fall ist $x_P \neq \pm a$. Wir dürfen also für die Tangenten durch P mit dem Ansatz

$$m = \frac{y - y_P}{x - x_P} \quad \Rightarrow \quad y = mx - my_P + y_P \tag{18}$$

arbeiten. Wir setzen (18) in (16) und erhalten die quadratische Gleichung für x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(mx - my_P + y_P\right)^2}{b^2} = 1 \tag{19}$$

Diese quadratische Gleichung (19) hat die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{am^2 x_P - amy_P + a\sqrt{a^2 b^2 m^2 - b^2 m^2 x_P^2 + 2b^2 m x_P y_P + b^4 - b^2 y_P^2}}{a^2 m^2 + b^2} \\ x_2 &= \frac{am^2 x_P - amy_P - a\sqrt{a^2 b^2 m^2 - b^2 m^2 x_P^2 + 2b^2 m x_P y_P + b^4 - b^2 y_P^2}}{a^2 m^2 + b^2} \end{aligned} \tag{20}$$

Für eine Tangente benötigen wir eine Doppellösung. Es muss also die Diskriminante in (20) verschwinden:

$$a^2b^2m^2 - b^2m^2x_P^2 + 2b^2mx_Py_P + b^4 - b^2y_P^2 = 0 \tag{21}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für m. Sie hat die beiden Lösungen:

$$m_1 = \frac{-x_Py_P+\sqrt{-a^2b^2+a^2y_P^2+b^2x_P^2}}{a^2-x_P^2} \quad , \quad m_2 = \frac{-x_Py_P-\sqrt{-a^2b^2+a^2y_P^2+b^2x_P^2}}{a^2-x_P^2} \tag{22}$$

Das sind die Steigungen der beiden von P ausgehenden Tangenten an die Ellipse. Die Orthogonalitätsbedingung

$$m_1m_2 + 1 = 0 \tag{23}$$

liefert nach einigen Rechnungen:

$$x_p^2 + y_p^2 = a^2 + b^2 \tag{24}$$

Der Punkt P liegt also auf dem Kreis mit dem Radius r gemäß (1).

2 Hyperbel

2.1 Thalesfigur

Die Thalesfigur existiert nur für $a > b$ und ist ebenfalls ein Kreis. Dieser Thaleskreis hat den Radius r:

$$r = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{25}$$

Für $a > b$ liegen die Hyperbeläste im spitzwinkligen Bereich der Asymptoten (Abb. 3).

Die Asymptoten zerlegen den Thaleskreis in zwei kleine Bögen im spitzwinkligen Bereich und zwei große Bögen im stumpfwinkligen Bereich.

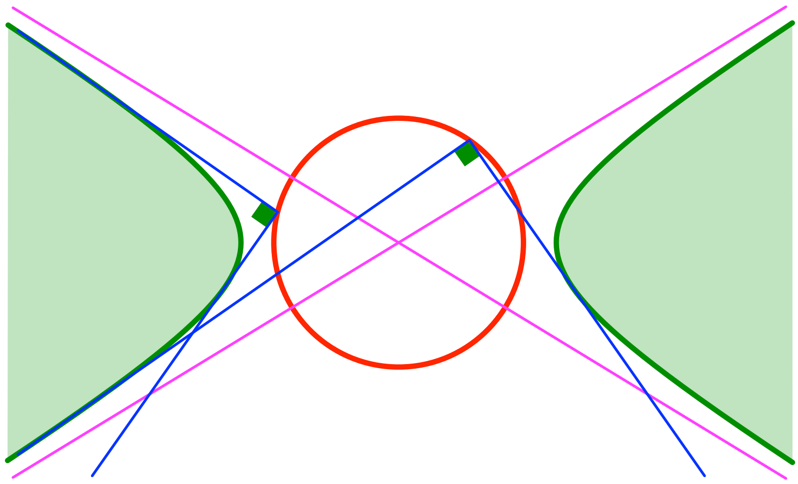


Abb. 3: Hyperbel und Thaleskreis

Die von Punkten auf einem kleinen Bogen des Thaleskreises ausgehenden Tangenten berühren beide denselben Hyperbelast. Dieser Hyperbelast liegt im Innern des Rechtwinkelbereiches der beiden Tangenten.

Die von Punkten auf einem großen Bogen des Thaleskreises ausgehenden Tangenten berühren beide Hyperbeläste. Die beiden Hyperbeläste liegen außerhalb des Rechtwinkelbereiches der beiden Tangenten. Um die Hyperbel zu sehen, bräuchte es eine Fischaugenkamera.

Für die Punkte des Thaleskreises auf den Asymptoten haben wir einen interessanten Sonderfall (Abb. 4).

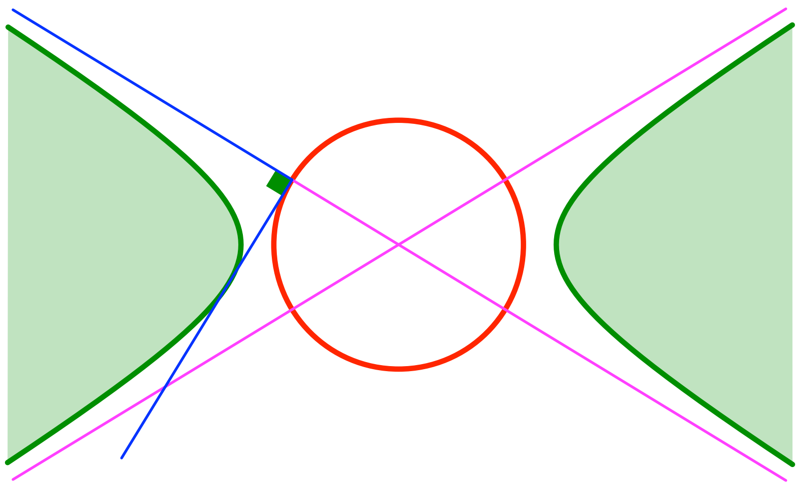


Abb. 4: Sonderfall auf den Asymptoten

Für den Sonderfall $a=b$ (gleichseitige Hyperbel) schrumpft der Thaleskreis zu einem Punkt und die „Tangenten“ sind die Asymptoten.

2.2 Beweise

2.2.1 Beweis mit Parameterdarstellung

Ein allgemeiner Beweis analog zur Ellipse ist mir nicht gelungen. Das Problem liegt darin, dass die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t)=\begin{bmatrix} a\cosh(t) \\ b\sinh(t) \end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{R} \tag{26}$$

nur den rechten Hyperbelast liefert, wir aber beide Hyperbeläste benötigen.

2.2.2 Erster Beweis mit quadratischen Gleichungen

Der Beweis geht analog zum entsprechenden Beweis bei der Ellipse. Es ändern lediglich einige Vorzeichen.

Wir beginnen mit dem Punkt P auf dem Thaleskreis (man beachte den geänderten Radius des Thalekreises):

$$P=(x_P,y_P)=\left(x_P,\sqrt{a^2-b^2-x_P^2}\right) \tag{27}$$

Die x-Koordinate des Punktes P ist also ein freier Parameter. Der Punkt P liegt auf dem oberen Halbkreis, dies ist aus Symmetriegründen aber keine Beschränkung der Allgemeinheit.

Weiter hat die Hyperbel die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{28}$$

Wir nehmen das Geradenbüschel durch P:

$$m=\frac{y-y_P}{x-x_P} \tag{29}$$

Dabei ist m die Steigung der Büschelgeraden.

Wir schneiden die Hyperbel mit dem Geradenbüschel, das heißt wir lösen das aus (28) und (29) bestehende quadratische Gleichungssystem nach (x,y) auf.

Wir erhalten die beiden x-Werte:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{\left(-am^2 x_P + \sqrt{a^2-b^2-x_P^2}\,am - \sqrt{-a^2b^2m^2+b^2m^2x_P^2-2\sqrt{a^2-b^2-x_P^2}\,b^2mx_P+a^2b^2-b^2x_p^2}\right)a}{a^2m^2-b^2} \\
x_2 &= -\frac{\left(-am^2 x_P + \sqrt{a^2-b^2-x_P^2}\,am + \sqrt{-a^2b^2m^2+b^2m^2x_P^2-2\sqrt{a^2-b^2-x_P^2}\,b^2mx_P+a^2b^2-b^2x_p^2}\right)a}{a^2m^2-b^2}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Für eine berührende Tangente sollten wir aber genau eine Lösung haben. Daher muss der Radikand in der großen Wurzel null sein. Dies ergibt eine quadratische Gleichung für m:

$$
-a^2b^2m^2 + b^2m^2x_P^2 - 2\sqrt{a^2-b^2-x_P^2}\,b^2mx_P + a^2b^2 - b^2x_p^2 = 0 \tag{31}
$$

Wir erhalten die beiden Lösungen:

$$
\begin{aligned}
m_1 &= -\frac{\sqrt{a^2-b^2-x_P^2}\,x_P - \sqrt{a^4-a^2x_P^2-b^2x_P^2}}{a^2-x_P^2} \\
m_2 &= -\frac{\sqrt{a^2-b^2-x_P^2}\,x_P + \sqrt{a^4-a^2x_P^2-b^2x_P^2}}{a^2-x_P^2}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Dies sind die Steigungen der beiden Tangenten von P an die Hyperbel. Wegen

$$
m_1 m_2 = -1 \tag{33}
$$

sind die beiden Tangenten orthogonal.

2.2.3 Zweiter Beweis mit quadratischen Gleichungen

Der Beweis geht analog zum entsprechenden Beweis bei der Ellipse. Es ändern einige Vorzeichen.

Wir arbeiten mit der Hyperbelgleichung:

$$
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{34}
$$

Der Punkt P habe die Koordinaten $P\left(x_P, y_P\right)$.

Der Fall $x_P = \pm a$ ist nicht möglich, weil es dazu keine orthogonale Tangente gibt. Es gibt also keine Lösung mit einer senkrechten Tangente und wir dürfen für die Tangenten durch P mit dem Ansatz

$$m = \frac{y - y_p}{x - x_P} \quad \Rightarrow \quad y = mx - my_P + y_P \tag{35}$$

arbeiten. Wir setzen (35) in (34) und erhalten die quadratische Gleichung für x:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(mx - my_P + y_P\right)^2}{b^2} = 1 \tag{36}$$

Diese quadratische Gleichung (36) hat die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{am^2 x_P - amy_P + a\sqrt{-a^2b^2m^2 + b^2m^2x_P^2 - 2b^2mx_Py_P + b^4 + b^2y_P^2}}{a^2m^2 + b^2} \\ x_2 &= \frac{am^2 x_P - amy_P - a\sqrt{-a^2b^2m^2 + b^2m^2x_P^2 - 2b^2mx_Py_P + b^4 + b^2y_P^2}}{a^2m^2 + b^2} \end{aligned} \tag{37}$$

Für eine Tangente benötigen wir eine Doppellösung. Es muss also die Diskriminante in (20) verschwinden:

$$-a^2b^2m^2 + b^2m^2x_P^2 - 2b^2mx_Py_P + b^4 + b^2y_P^2 = 0 \tag{38}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für m. Sie hat die beiden Lösungen:

$$m_1 = \frac{-x_Py_P + \sqrt{a^2b^2 + a^2y_P^2 - b^2x_P^2}}{a^2 - x_P^2} \quad , \quad m_2 = \frac{-x_Py_P - \sqrt{a^2b^2 + a^2y_P^2 - b^2x_P^2}}{a^2 - x_P^2} \tag{39}$$

Das sind die Steigungen der beiden von P ausgehenden Tangenten an die Ellipse. Die Orthogonalitätsbedingung

$$m_1m_2 + 1 = 0 \tag{40}$$

liefert nach einigen Rechnungen:

$$x_p^2 + y_p^2 = a^2 - b^2 \tag{41}$$

Der Punkt P liegt also auf dem Kreis mit dem Radius r gemäß (25).

Websites

Hans Walser: Sehwinkel bei Kegelschnitten
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Sehwinkel_Kegelschnitte/Sehwinkel_Kegelschnitte.htm