Hans Walser, [20150811]

Tangentenvierecke

Anregung: W. G., M.

1 Worum es geht

Vierecke mit $a+c=b+d$ haben einen Inkreis. Sie werden daher als Tangentenvierecke bezeichnet.

Allerdings ist ein Tangentenviereck durch seine vier Seiten *a, b, c, d* mit der Nebenbedingung $a+c=b+d$ nicht eindeutig festgelegt. Wir können vielmehr ein Gelenkmodell bauen. Die Abbildung 1 zeigt ein Gelenkmodell mit $a = 10$, $b = 7$, $c = 5$, $d = 8$.

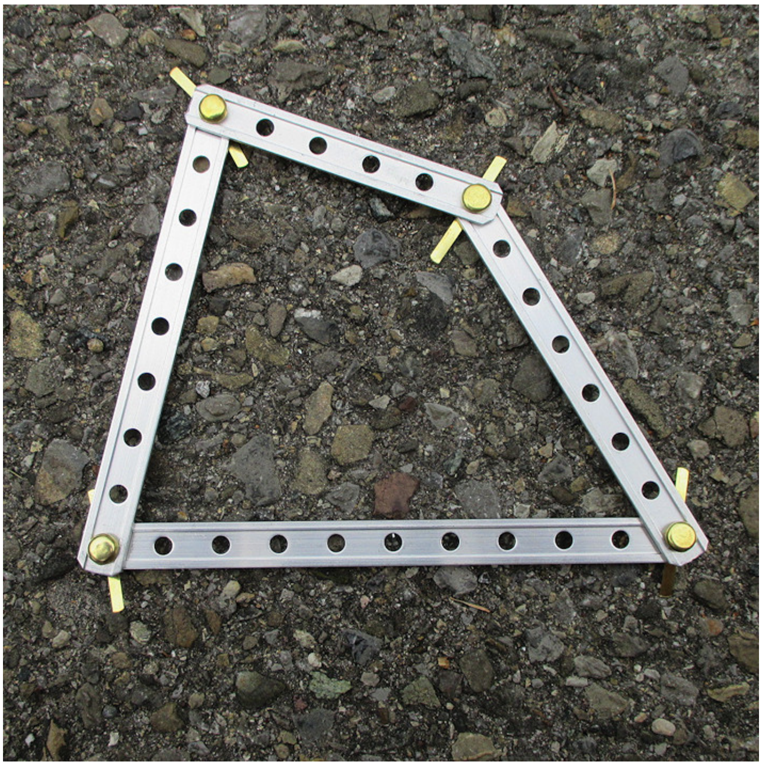

Abb. 1: Tangentenviereck als Gelenkmodell

In jeder Position hat das Viereck einen Inkreis. Die Größe des Inkreises variiert aber.

Im Folgenden werden Größe und Lage des Inkreises untersucht. Insbesondere interessiert das Tangentenviereck mit maximalem Inkreis.

2 Beispielsequenz

Die Abbildung 2 zeigt eine Sequenz von Positionen des Tangentenviereckes. Dabei wurden die Eckpunkte *A* und *B* auf dem Zeichenpapier fixiert und die Punkte *C* und *D* gemäß dem Gelenkmechanismus bewegt. Faktisch kann zum Beispiel *C* bewegt werden worauf sich *D* ergibt. Wir haben einen freien Parameter.

In jeder Position sind der Inkreis und dessen Mittelpunkt eingezeichnet. Beim nichtkonvexen Tangentenviereck müssen geeignete Seiten nach innen verlängert werden um den Inkreis zeichnen zu können.

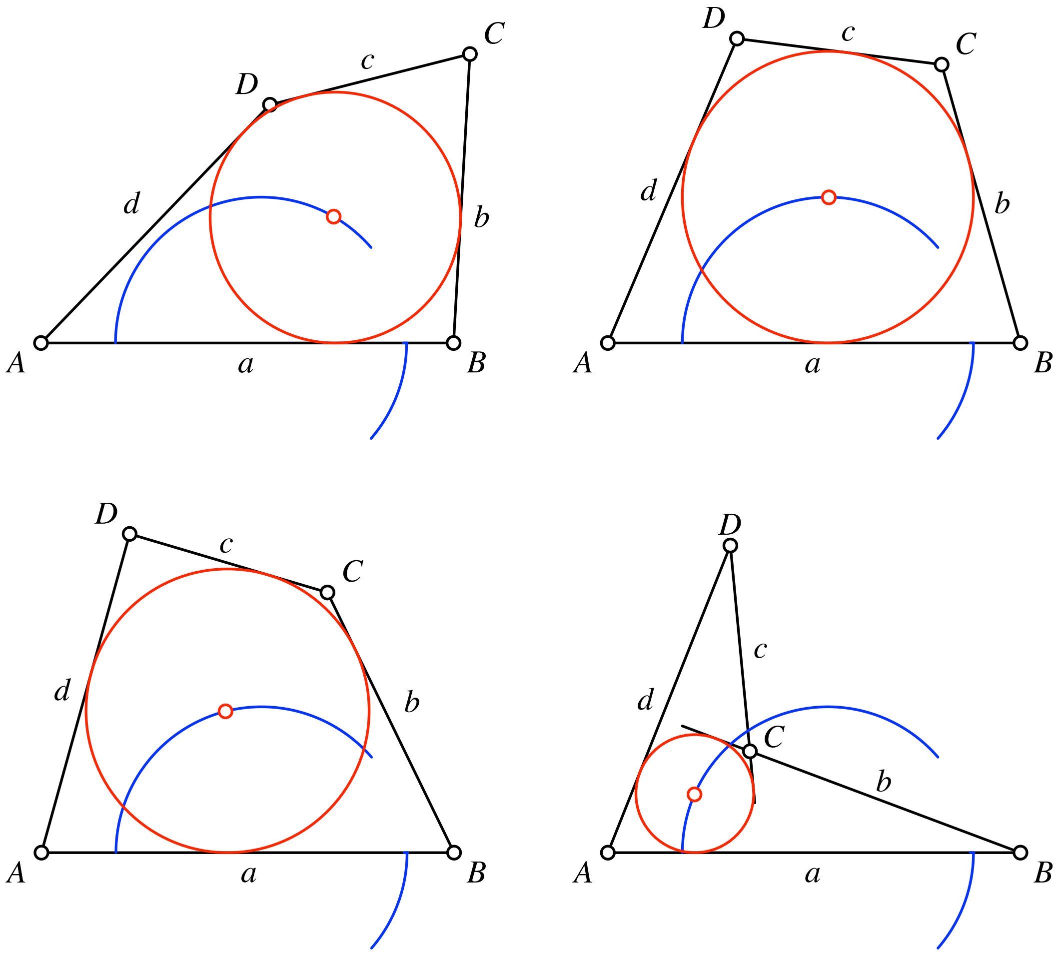

Abb. 2: Verschiedene Positionen des Tangentenviereckes

Die Zentren der Inkreise liegen offenbar auf einem Kreis (in der Abbildung 2 blau eingezeichnet). Dieser Kreis hat sein Zentrum auf der Seite a und ist gleich groß wie der maximal mögliche Inkreis.

3 Konstruktion des blauen Kreises

Zur Konstruktion des blauen Kreises zeichnen wir ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b und $c+d$ (Abb. 3). Das ist ein Sonderfall des Tangentenviereckes, indem der Winkel $\delta = \pi$ gewählt wird. In diesem Dreieck zeichnen wir den Inkreis mit dem Inkreismittelpunkt I. – Der Inkreis berührt die Seite CA im Punkt D. Dies ist für unsere Überlegungen aber nicht relevant.

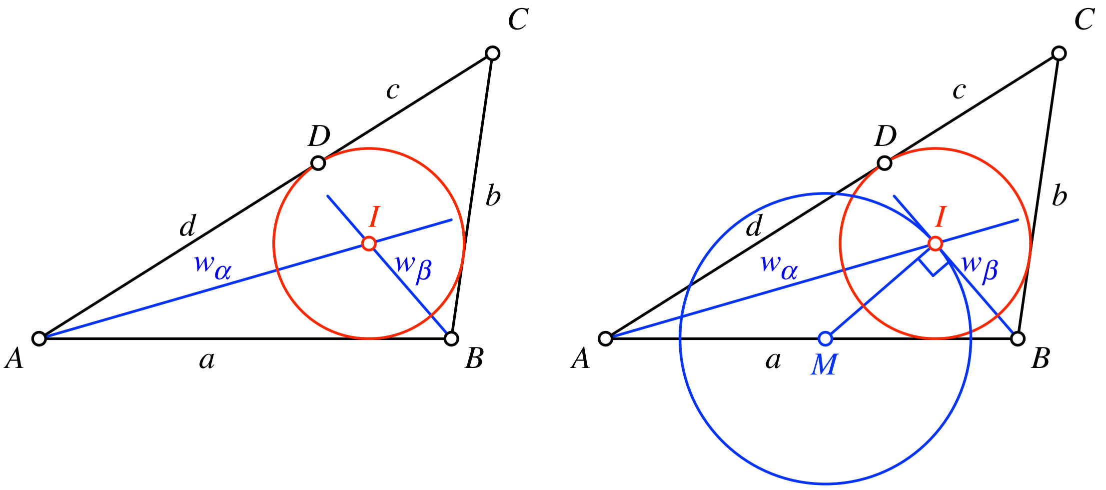

Abb.3: Konstruktion des blauen Kreises

Nun zeichnen wir die Senkrechte zur Winkelhalbierenden w_β durch I und schneiden diese Senkrechte mit der Seite AB. Der Schnittpunkt M ist der Mittelpunkt des blauen Kreises. Der blaue Kreis verläuft durch I. Man beachte, dass der Punkt M *nicht* der Mittelpunkt der Strecke AB ist.

4 Konstruktion des optimalen Tangentenviereckes

Der blaue Kreis ist so groß wie der maximal mögliche Inkreis des Tangentenvierecks. Wir können nun den blauen Kreis hochziehen gemäß Abbildung 4 und erhalten so den Inkreis des optimalen Tangentendreieckes.

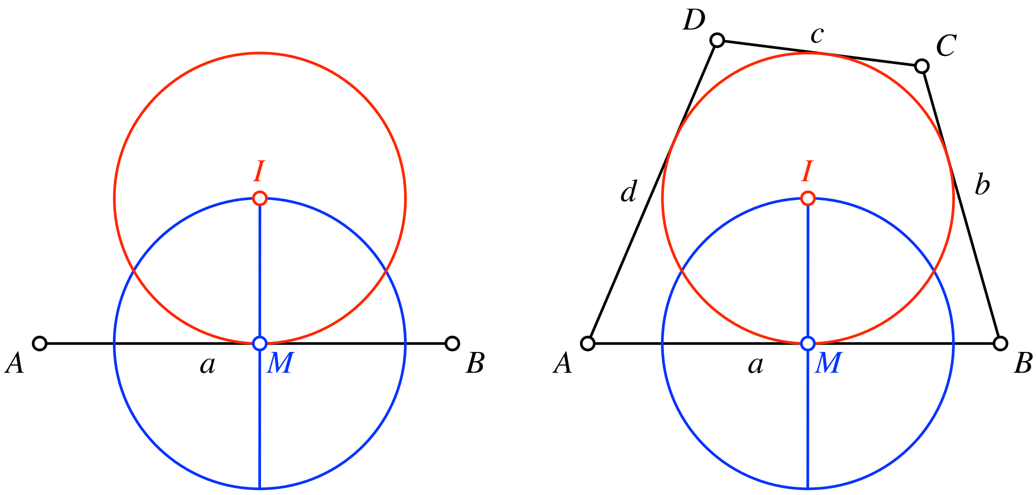

Abb. 4: Optimales Tangentenviereck

Von A und B aus können wir nun die Tangenten mit den Längen d respektive b zeichnen und erhalten so die Punkte D und C.

Nun haben wir eine Kontrollmöglichkeit: Die Strecke CD muss die Länge c haben und den Inkreis berühren.

Konstruktion mit DGS erhärtet.