Hans Walser, [20180602]

Tangenten an Kegelschnitt

1 Worum es geht

Von einem Punkt P aus sollen die Tangenten an einen Kegelschnitt gelegt werden.

2 Parabel

Die Parabel p sei durch den Brennpunkt F und die Leitlinie l gegeben (Abb. 1a).

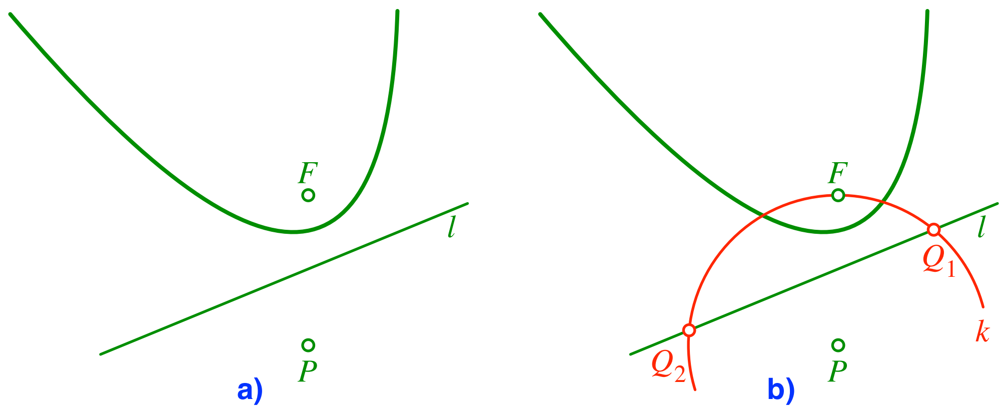

Abb. 1: Parabel. Erster Schritt

Wir schneiden den Kreis k um P durch F und mit der Leitlinie l in Q_1 und Q_2 (Abb. 1b). Die Mittelsenkrechten der Strecken FQ_1 und FQ_2 sind die gesuchten Tangenten t_1 beziehungsweise t_2 (Abb. 2a).

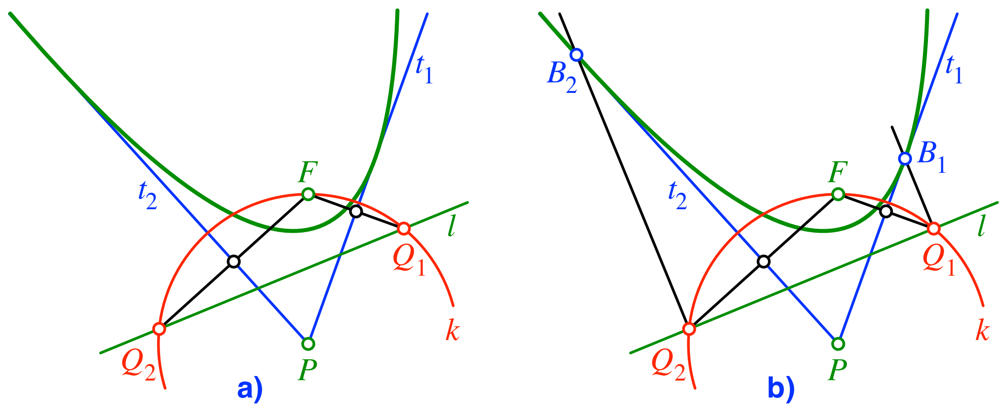

Abb. 2: Parabeltangenten

Die Berührungspunkte liegen auf den Loten zur Leitlinie l durch Q_1 und Q_2.

Diese Konstruktion folgt aus der Abstandsdefinition und der Reflexionseigenschaft der Parabel.

Das Viereck PQ_1B_1F ist ein Drachenviereck mit der Tangente t_1 als Symmetrieachse (Abb. 3a). Der Diagonalenschnittpunkt D_1 liegt auf der Scheiteltangente t_S der Parabel. Analog für die andere Tangente (Abb. 3b).

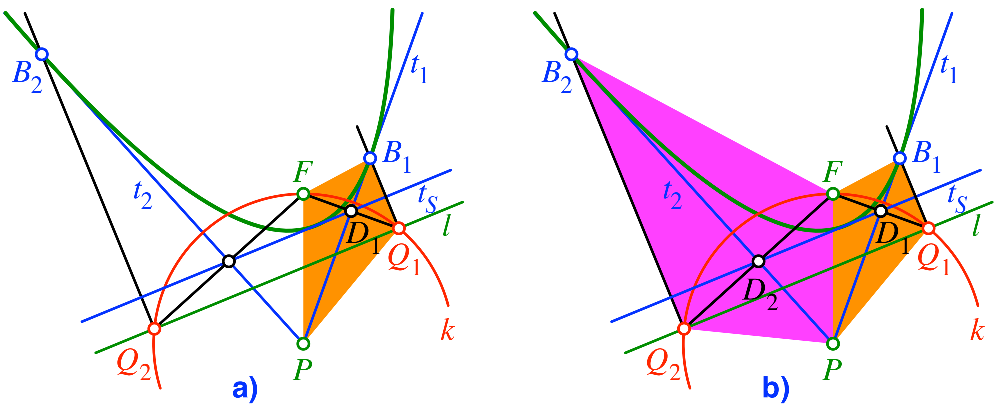

Abb. 3: Drachenvierecke

3 Ellipse

Die Tangentenkonstruktion für die Ellipse geht im Prinzip analog. Von einer Ellipse e seien die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 sowie die Länge $2a$ der langen Achse bekannt (Abb. 4a).

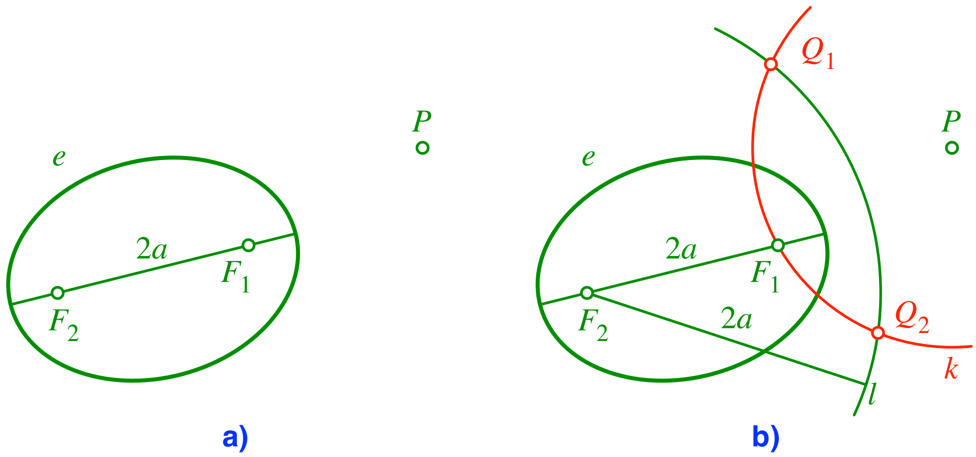

Abb. 4: Ellipse

Als ersten Schritt zeichnen wir einen Kreis l mit dem Zentrum F_2 und dem Radius $2a$ (dieser Kreis entspricht der Leitlinie der Parabel) sowie einen Kreis k um P durch den anderen Brennpunkt F_1. Die Schnittpunkte der beiden Kreise bezeichnen wir mit Q_1 und Q_2 (Abb. 4b).

Die Mittelsenkrechten der Strecken F_1Q_1 und F_1Q_2 sind die gesuchten Tangenten t_1 beziehungsweise t_2 (Abb. 5a). Die Berührungspunkte liegen auf den Strecken F_2Q_1 und F_2Q_2 (Abb. 5b).

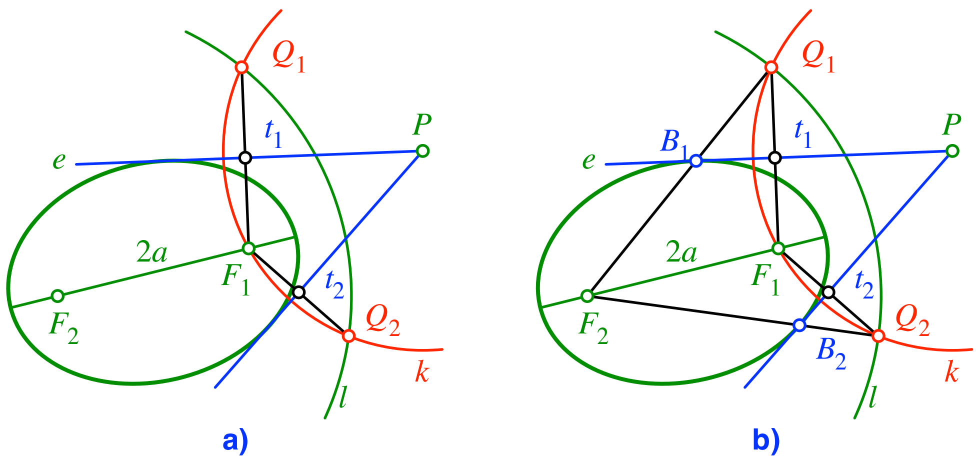

Abb. 5: Ellipsentangenten

Wieder gibt es Drachenvierecke (Abb. 6). Deren Diagonalenschnittpunkte liegen auf dem Thaleskreis k_S über der langen Ellipsenachse. Dieser Kreis berührt die Ellipsen in den beiden spitzen Scheiteln.

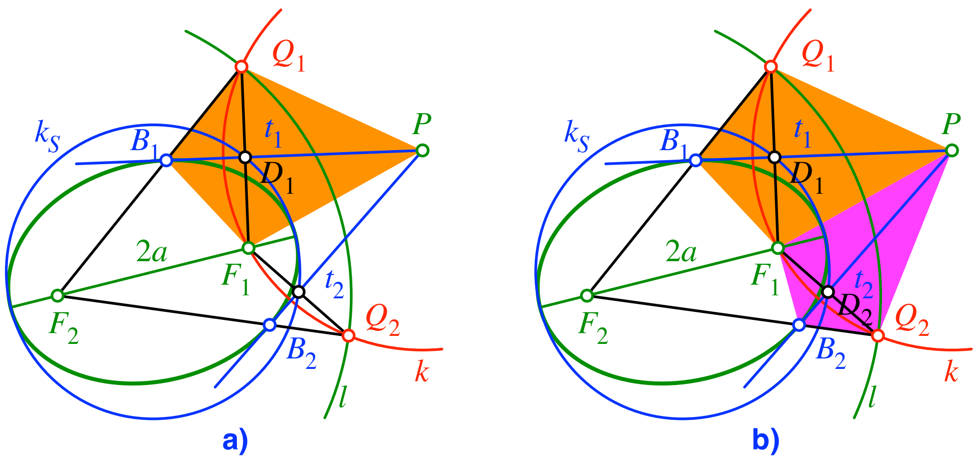

Abb. 6: Drachenvierecke bei der Ellipse

Bemerkung 1: Die Konstruktion ist asymmetrisch, indem die beiden Brennpunkte unterschiedlich verwendet werden. Die Abbildung 7a zeigt die Konstruktion mit vertauschten Rollen der beiden Brennpunkt, die Abbildung 7b die Überlagerung der beiden Lösungswege.

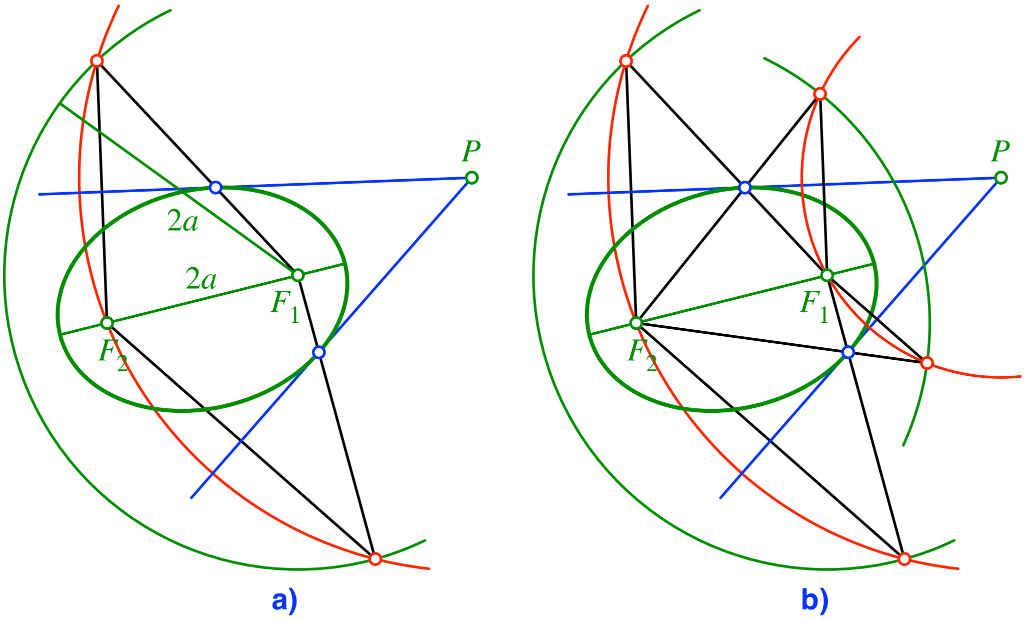

Abb. 7: Vertauschte Rollen. Überlagerung

Bemerkung 2: Die in der Schule übliche Konstruktion der Ellipsentangente benutzt die Affinität. Die Ellipse wird affin zu einem Kreis aufgeblasen (Abb. 8a), dabei wird der Punkt P mitgenommen. Dann werden die Kreistangenten gezeichnet und anschließend das Ganze rückwärts abgebildet (Abb. 8b).

Unsere Konstruktion verwendet keine Affinität.

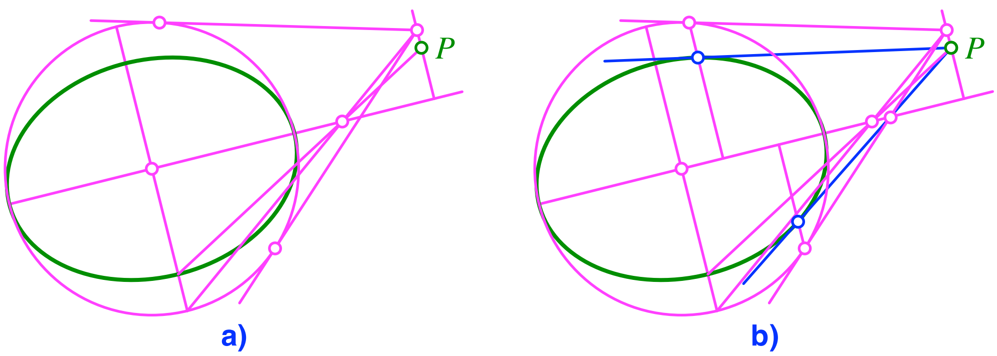

Abb. 8: Konstruktion mit Affinität

Bemerkung 3: Wenn der Brennpunkt F_2 (nach links) ins Unendliche abrauscht ergibt sich aus der Abbildung 5 die Situation der Parabel.

4 Hyperbel

Die Konstruktion geht völlig analog zur Ellipse. Die Abbildungen 9, 10 und 11 zeigen den Konstruktionsablauf.

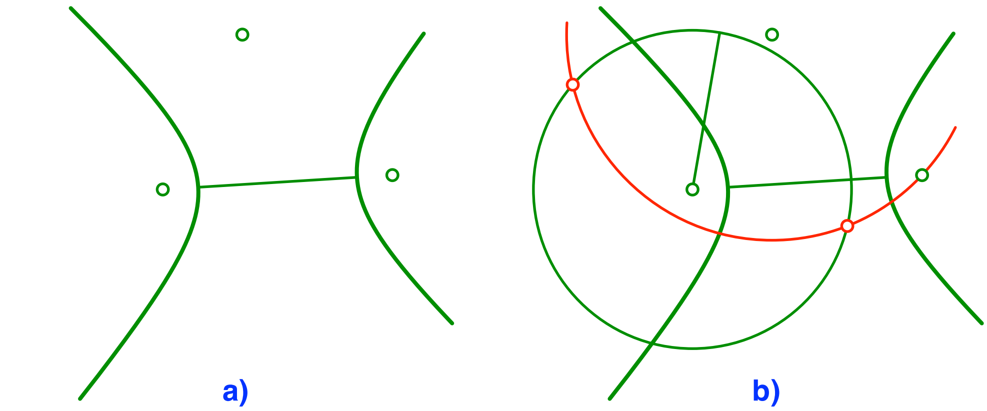

Abb. 9: Hyperbel

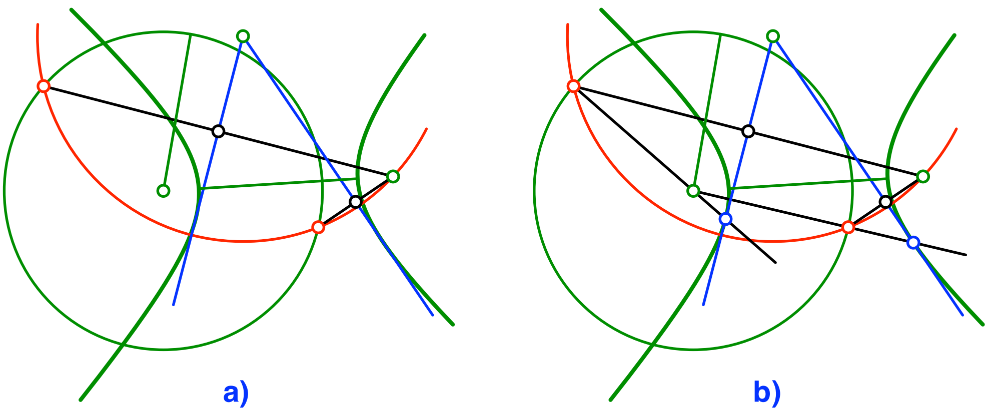

Abb. 10: Hyperbeltangenten

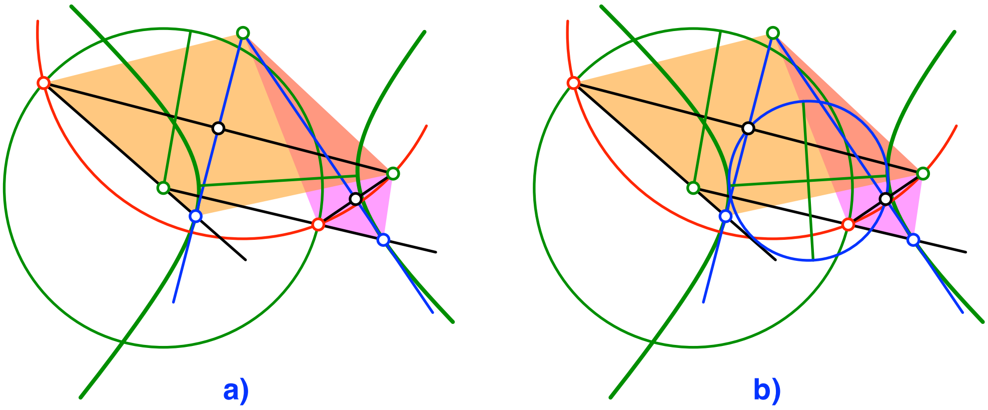

Abb. 11: Drachenvierecke bei der Hyperbel

Websites

Hans Walser: Tangente an Kegelschnitt (abgerufen 03.06.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/T/Tangente_an_Kegelschnitt/Tangente_an_Kegelschnitt.htm