Hans Walser, [20170313]

Symmetrie als Beweismittel

Idee und Anregung: E. V., M.

1 Worum geht es?

Es wird ein Satz der Elementargeometrie mit Hilfe der Symmetrieklassen für Flächenornamente bewiesen.

2 Der Satz

Wir setzen den Seiten eines Sehnenvierecks Parallelogramme an (Abb. 1a). Die Parallelogramme sind jeweils aus zwei gegenüberliegenden Seiten des Sehnenviereckes gebildet und haben alle denselben, aber beliebigen spitzen Winkel (kann auch ein rechter Winkel sein). Gegenüberliegende Parallelogramme sind also kongruent, sozusagen „Hochformat" und „Querformat".

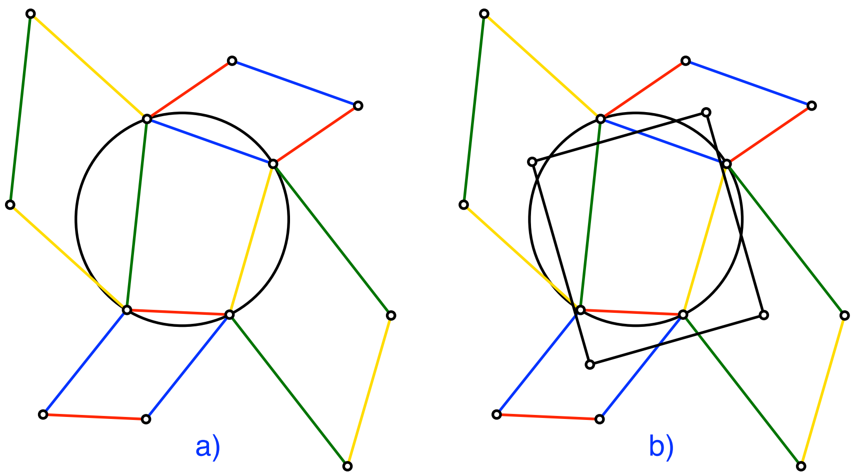

Abb. 1: Sehnenviereck und Parallelogramme

Satz: Die Zentren der Parallelogramme sind die Ecken eines Rechteckes.

3 Winkeleigenschaften

Im Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel je auf 180°. In den Parallelogrammen ergänzen sich spitze und stumpfe Winkel ebenfalls auf 180°. Daher erscheinen die Innenwinkel des Sehnenvierecks außen als Winkel zwischen den Parallelogrammen (Abb. 2a). Dabei wir die Orientierung umgedreht: der rote Winkel im Sehnenviereck hat als Schenkel im positiven Drehsinn die rote und die grüne Seite des Sehnenviereckes, der rote Außenwinkel hat dieselben Schenkel, aber im negativen Drehsinn.

Wir können daher zwischen die Parallelogramme spiegelbildliche (grüne) Kopien des (gelben) Sehnenviereckes einfügen (Abb. 2b).

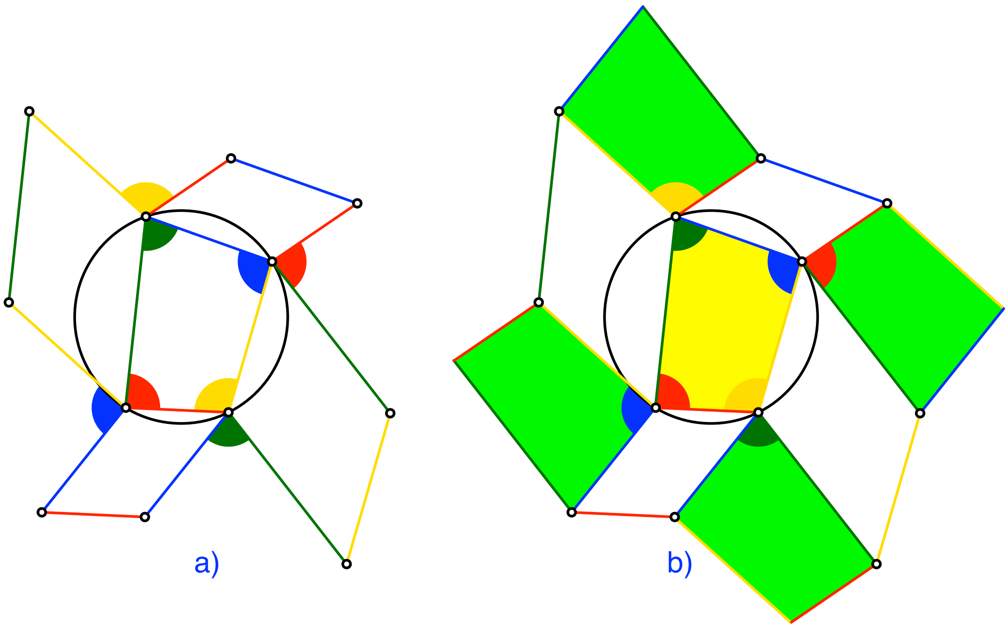

Abb. 2: Außenwinkel

Die Abbildung 3 zeigt dasselbe wie die Abbildung 2b, zusätzlich sind nun auch die Parallelogramme gefärbt.

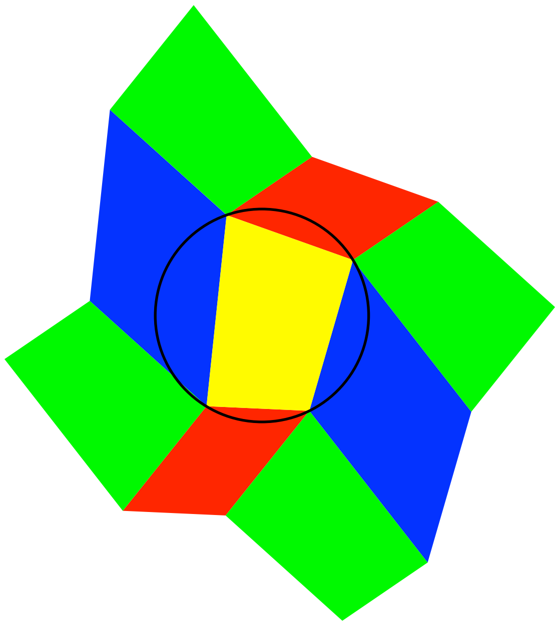

Abb. 3: Farbige Parallelogramme

4 Flächenornament

Die Figur der Abbildung 3 können wir zu einem Flächenornament ausbauen (Abb. 4).

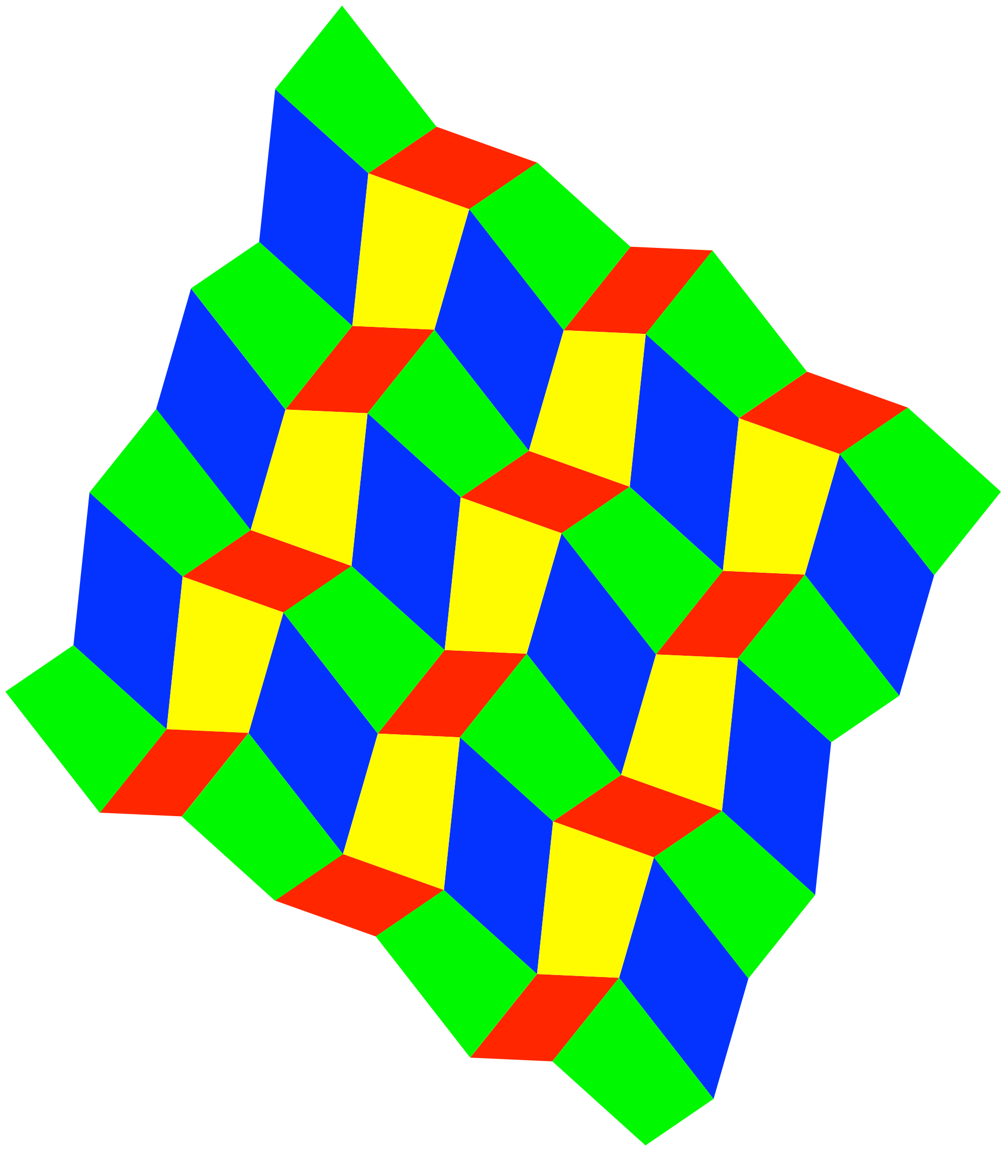

Abb. 4: Flächenornament

5 Symmetrien

Das Flächenornament hat folgende Symmetrien (Abb. 5):
Drehungen um 180°. Die Drehzentren sind die Mittelpunkte der Parallelogramme.
Schubspiegelungen mit Achsen in zwei verschiedenen Richtungen.

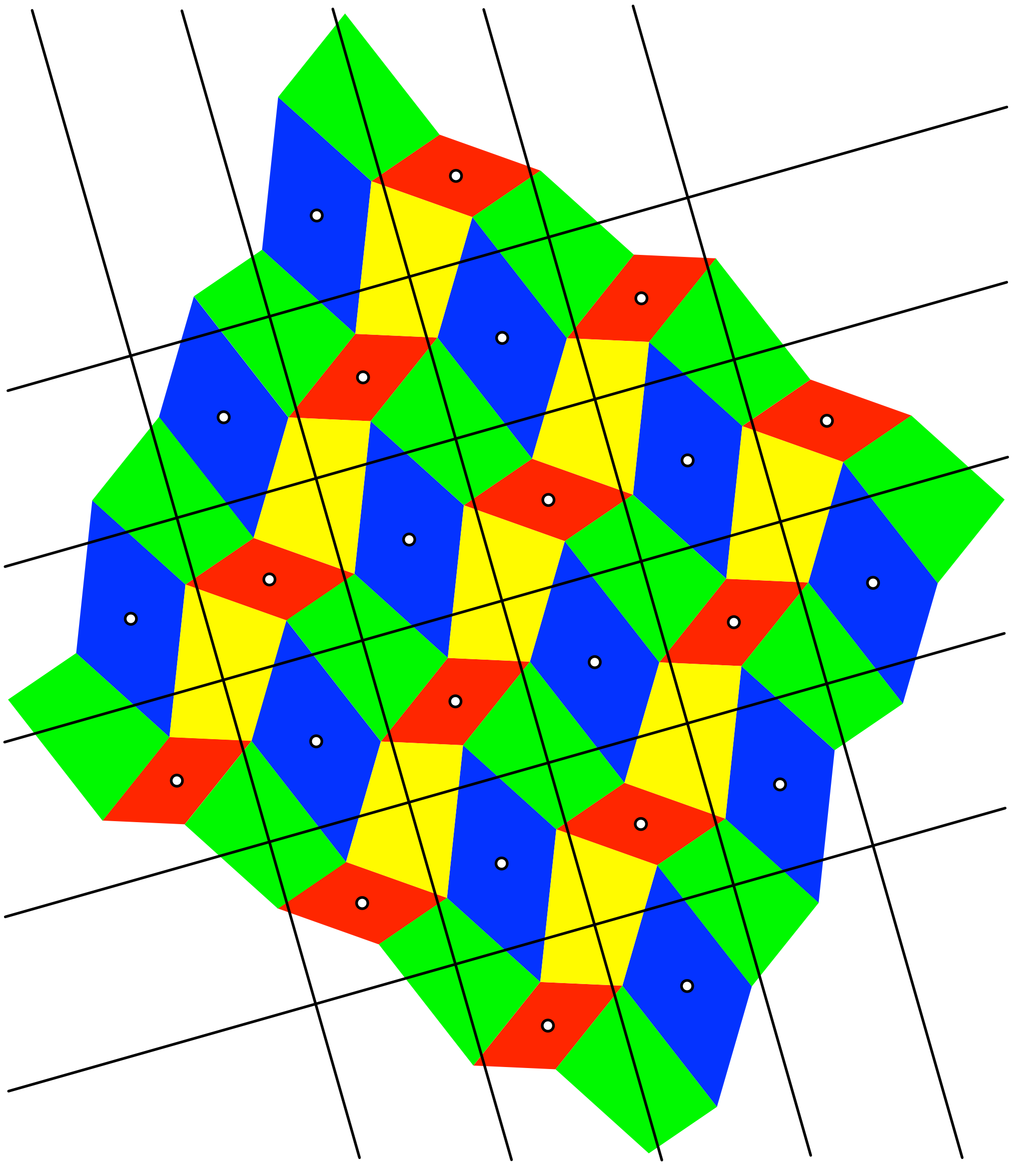

Abb. 5: Symmetrien

6 Symmetrieklassen

Bei Flächenornamenten gibt es 17 Symmetrieklassen [1] , [2] , [3] . Durchmustern der 17 Symmetrieklassen oder analytisches Vorgehen mit Hilfe der gegebenen Symmetrien zeigt, dass das Flächenornament zur Gruppe pgg gehört. Diese Gruppe hat keine Symmetrieachsen, hingegen zwei zueinander senkrechte Schubspiegelachsen sowie zwei Klassen Drehzentren für Drehungen von 180° (Punktspiegelungen).

7 Rechteckraster

Die Schubspiegelachsen bilden ein Rechteckraster. Aus Symmetriegründen sind die Drehzentren (also die Mittelpunkte der Parallelogramme) die Mittelpunkte der einzelnen Rasterrechtecke. Diese Drehzentren sind die Eckpunkte des zum Rechteckraster der Schubspiegelachsen dualen Rasters und bilden daher ebenfalls ein Rechteckraster.

Damit ist der Satz bewiesen.

Für den Beweis brauchten wir die Theorie der Symmetrieklassen der Flächenornamente. Diese Theorie wird also als Werkzeug eingesetzt.

Websites

[1] WallpaperPatterns (13.03.2017)

http://mathstat.slu.edu/escher/index.php/Wallpaper_Patterns

[2] Morandi, Patrick J. (2007): Symmetry Groups: The Classification of Wallpaper Patterns (13.03.2017)
http://sierra.nmsu.edu/morandi/OldWebPages/Math526Spring2007/Math526text2007-01-10.pdf

[3] Wikipedia: Ebene kristallographische Gruppe (13.03.2017)

https://de.wikipedia.org/wiki/Ebene_kristallographische_Gruppe