Hans Walser, [20180826]

Summenformel

1 Worum geht es?

Eine bekannte Summenformel wird auf zwei Arten bewiesen.

2 Die Summe

Es ist:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} j \right)^2 \tag{1}$$

Beispiele:

n		Kuben	Summe der Kuben		Summe der Zahlen	Quadrat davon
1		1	1		1	1
2		8	9		3	9
3		27	36		6	36
4		64	100		10	100
5		125	225		15	225
6		216	441		21	441

Tab. 1: Beispiele

3 Beweise

3.1 Induktionsbeweis

Zunächst ist:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

Wir haben zu zeigen:

$$\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = (n+1)^3 \tag{3}$$

Nach der dritten binomischen Formel ist:

$$\begin{aligned}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2&=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\right)\\&=\left(\frac{(n+1)(2n+2)}{2}\right)\left(\frac{2(n+1)}{2}\right)=(n+1)^3\end{aligned}\tag{4}$$

3.2 Beweis ohne Worte

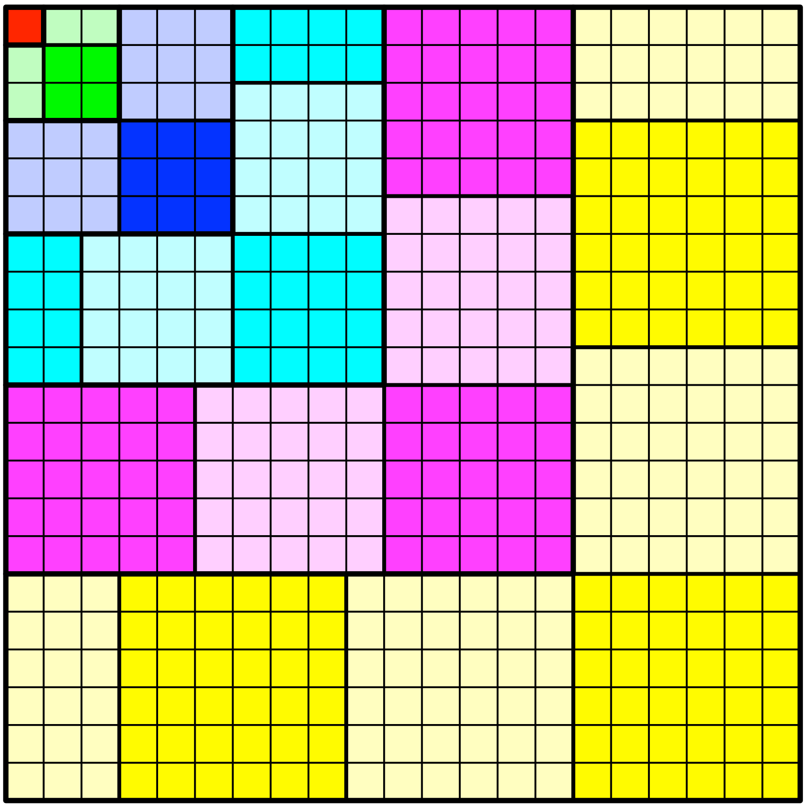

Abb. 1: Beweis ohne Worte