Hans Walser, [20160409]

Stereografische Projektion

Idee und Anregung: R. S., C.

1 Problemstellung

Gegeben sind die vier Funktionen:

$$f_1 : z \mapsto \frac{z^2+z}{z^2+1}, \quad f_2 : z \mapsto \frac{z^2-z}{z^2+1}, \quad f_3 : z \mapsto \frac{1-z}{z^2+1}, \quad f_4 : z \mapsto \frac{1+z}{z^2+1} \tag{1}$$

Für eine reelle Zahl z werden die vier Punkte

$$A\big(f_1(z), f_2(z)\big), \quad B\big(f_2(z), f_3(z)\big), \quad C\big(f_3(z), f_4(z)\big), \quad D\big(f_4(z), f_1(z)\big) \tag{2}$$

gebildet. Welche Eigenschaften haben die Vierecke *ABCD*?

Die Abbildung 1 zeigt die Situation für ganze Zahlen $z \in \{-1000, ..., 1000\}$.

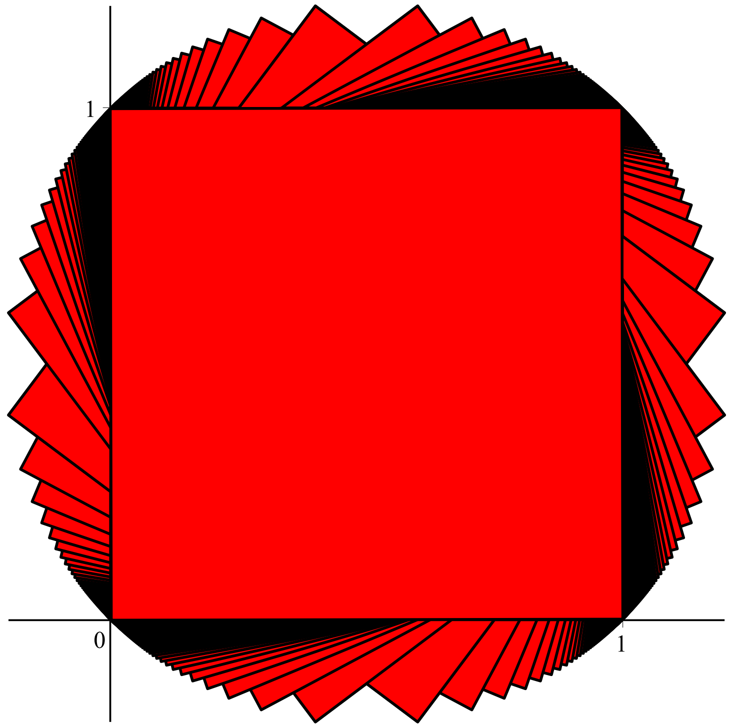

Abb. 1: Ganzzahlige Parameter

2 Bearbeitung

Wir transformieren die Situation. Wir schieben den Punkt $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ in den Ursprung und skalieren mit dem Faktor $\sqrt{2}$. Damit wird:

$$
\begin{aligned}
g_1 : z &\mapsto \sqrt{2}\left(f_1(z)-\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\tfrac{z^2+z}{z^2+1}-\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\tfrac{z^2+2z-1}{z^2+1}\\
g_2 : z &\mapsto \sqrt{2}\left(f_2(z)-\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\tfrac{z^2-z}{z^2+1}-\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\tfrac{z^2-2z-1}{z^2+1}\\
g_3 : z &\mapsto \sqrt{2}\left(f_3(z)-\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\tfrac{1-z}{z^2+1}-\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\tfrac{-z^2-2z+1}{z^2+1}\\
g_4 : z &\mapsto \sqrt{2}\left(f_4(z)-\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\tfrac{1+z}{z^2+1}-\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\tfrac{-z^2+2z+1}{z^2+1}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Es ist:

$$
\begin{aligned}
g_3(z)&=-g_1(z)\\
g_4(z)&=-g_2(z)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Aus der Symmetrie der Abbildungsgleichungen (3) und (4) folgt sofort, dass die Vierecke Quadrate mit Zentrum im Ursprung sind.
Wegen

$$
g_1^2(z)+g_2^2(z)=\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\tfrac{z^2+2z-1}{z^2+1}\right)^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\tfrac{z^2-2z-1}{z^2+1}\right)^2=1
\tag{5}
$$

haben diese Quadrate den Einheitskreis als gemeinsamen Umkreis.
Die Abbildung 2 zeigt die neue Situation im Koordinatensystem.

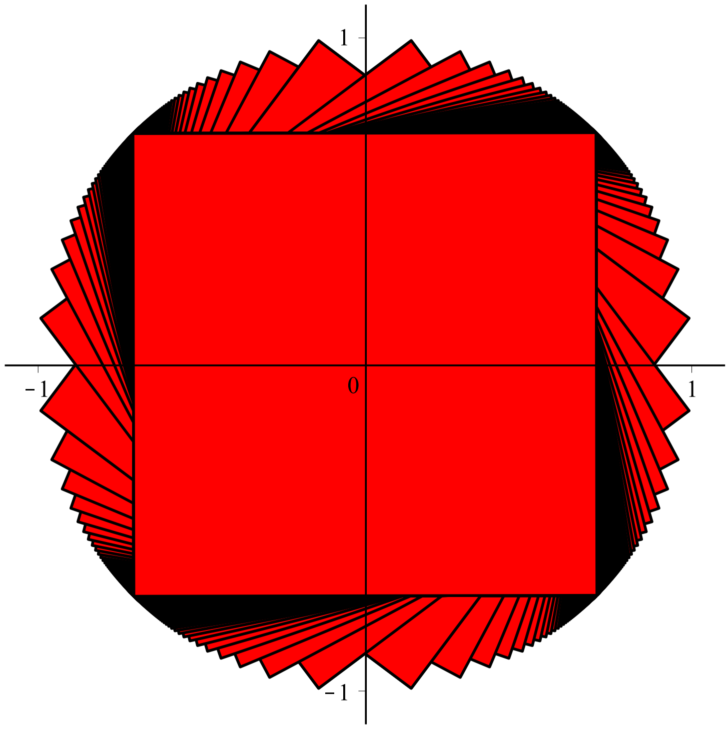

Abb. 2: Zentrierte Situation

Auffallend sind für $z \in \mathbb{Z}$ die Häufungspunkte bei den Quadratecken. Dazu folgende Erklärung.

3 Stereografische Projektion

Wegen der vierteiligen Drehsymmetrie der Quadrate können wir uns auf eine Quadratecke beschränken. Die Abbildung 3 zeigt die Ecken A für $z \in \mathbb{Z}$.

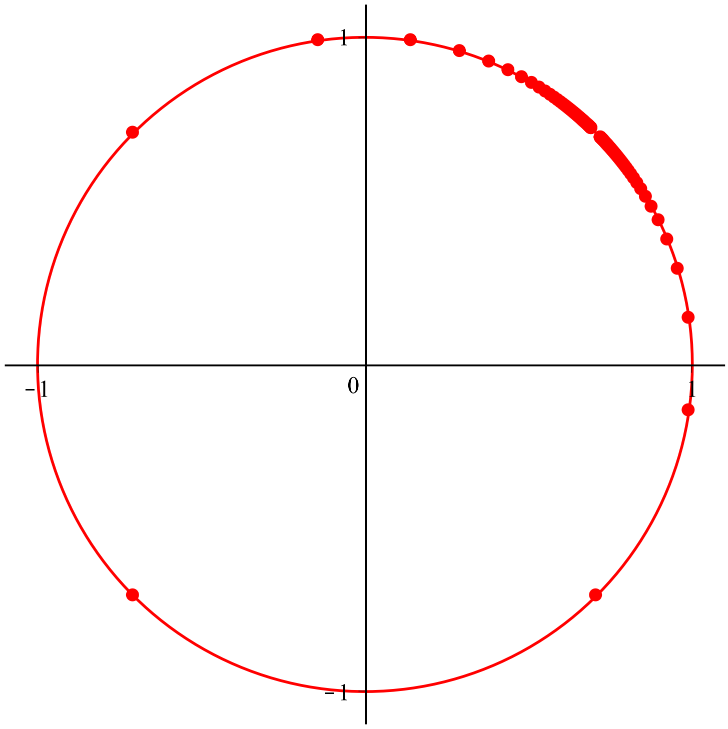

Abb. 3: Verteilung auf dem Einheitskreis

3.1 Vermutung

Die Verteilung der Punkte A auf dem Einheitskreis lässt eine stereografische Projektion vermuten.

Die stereografische Projektion (in der Ebene) ist eine Zentralprojektion des Kreises von einem Kreispunkt (blau in Abb. 4) aus auf die Tangente im gegenüberliegenden Kreispunkt.

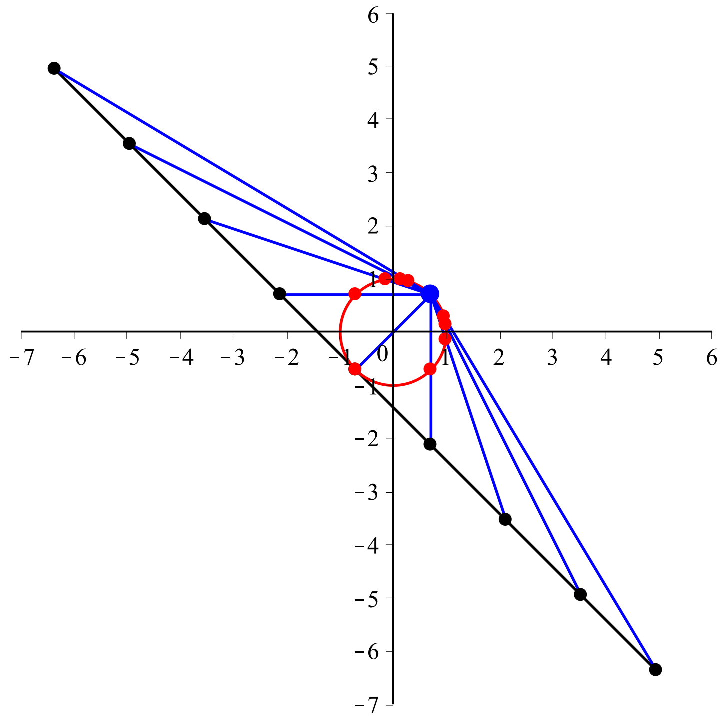

Abb. 4: Stereografische Projektion

Wir vermuten in unserem Beispiel, dass eine äquidistante Punktefolge (schwarz) mit der Äquidistanz 2 auf der Tangente auf den Kreis (rote Punkte) rückprojiziert wird. Das erklärt auch, warum das (blaue) Projektionszentrum zum Häufungspunkt der roten Punkte wird.

3.2 Beweis

Wegen (5) ist folgende Substitution zulässig:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \tfrac{z^2+2z-1}{z^2+1} = \cos\left(t-\tfrac{3}{4}\pi\right) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) \\ g_2(z) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \tfrac{z^2-2z-1}{z^2+1} = \sin\left(t-\tfrac{3}{4}\pi\right) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(t) \end{aligned} \tag{6}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tfrac{z^2+2z-1}{z^2+1} &= -\cos(t) + \sin(t) \\ \tfrac{z^2-2z-1}{z^2+1} &= -\cos(t) - \sin(t) \end{aligned} \tag{7}$$

Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen (7) liefert:

$$\begin{aligned} \cos(t) &= -\frac{z^2-1}{z^2+1} \\ \sin(t) &= \frac{2z}{z^2+1} \end{aligned} \tag{8}$$

Daraus folgt:

$$\tan(t) = \frac{2z}{1-z^2} \tag{9}$$

Vergleich mit dem Additionstheorem des Tangens

$$\tan(t) = \tan\left(\tfrac{t}{2}+\tfrac{t}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} \tag{10}$$

liefert:

$$z = \tan\left(\tfrac{t}{2}\right) \tag{11}$$

Die Abbildung 5 zeigt die stereografische Projektion in der üblichen Darstellung.

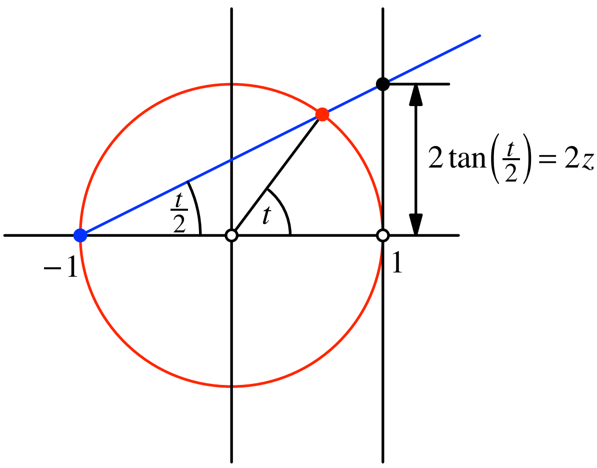

Abb. 5: Stereografische Projektion

Wir sehen, dass sich für $z \in \mathbb{Z}$ eine äquidistante Punktfolge mit der Äquidistanz 2 ergibt.