Hans Walser, [20120521]

Stammbrüche

1 Problemstellung

In der Antike, so zum Beispiel im alten Ägypten, gehörte es zum guten Ton, Brüche in eine Summe von Stammbrüchen zu zerlegen, also in Brüche mit dem Zähler 1. Diese Zerlegung ist allerdings nicht immer eindeutig, wie folgende Beispiele zeigen:

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{7}{15} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{120} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$$

2 Der gierige Algorithmus

2.1 S'hät solang's hät

Wir gehen nun so vor, dass wir zu einem gegebenen Bruch den größten Stammbruch nehmen, der noch im gegebenen Bruch enthalten ist. Diesen größten Stammbruch finden wir, indem wir den Kehrwert des gegebenen Bruches auf die nächste ganze Zahl aufrunden, und davon wieder den Kehrwert nehmen.

Beispiel:

$$\frac{3}{7} \mapsto \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 3 \mapsto \frac{1}{3}$$

Somit ist $\frac{1}{3}$ der größte Stammbruch, der in $\frac{3}{7}$ enthalten ist.

Vom Rest nehmen wir wieder den größten noch darin enthaltenen Stammbruch und so weiter und so fort. Dabei hoffen wir, dass es einmal „aufgeht“ im Sinne, dass der Rest ein Stammbruch wird.

In unserem Beispiel:

$$\frac{3}{7} \mapsto \left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil = 3 \mapsto \frac{1}{3}$$
$$\frac{3}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2}{21} \mapsto \left\lceil \frac{21}{2} \right\rceil = 11 \mapsto \frac{1}{11}$$
$$\frac{2}{21} - \frac{1}{11} = \frac{1}{231} \quad \text{Stammbruch!}$$

Somit haben wir eine Stammbruchzerlegung:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

Das Verfahren wurde von Fibonacci in seinem Liber abaci beschrieben.

2.2 Formal

Es sei $\frac{a}{b}$, $a < b$, der zu zerlegende Bruch. Dann arbeiten wir mit der folgenden Rekursion.

Start:

$$r_1 = \frac{a}{b}$$

Rekursionsformel:

$$q_n = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{r_n} \right\rceil}$$

$$r_{n+1} = r_n - q_n$$

Abbruchkriterium: Wir hören auf, sobald $r_n = q_n$, also $r_{n+1} = 0$.

Wir erhalten die Stammbruchzerlegung:

$$\frac{a}{b} = \sum_{n=1}^{\text{Abbruch}} q_n$$

Dass das Verfahren immer abbricht, wurde von James Joseph Sylvester 1880 bewiesen.

2.3 CAS-Programm

Ein Programm (MuPAD) kann so aussehen:

```
Stammbrueche:=proc(a,b)
begin
r[1]:=a/b:
rest:=a/b:
q[1]:=1/ceil(b/a):
n:=0:
while rest > 0 do
 n:=n+1:
 q[n]:=1/ceil(1/r[n]):
 r[n+1]:=r[n]-q[n]:
 rest:=r[n+1]:
end_while:
if n=1 then
 print(Unquoted,"".a."/".b." = ".q[1]);
else
 print(NoNL,"".a."/".b." = ".q[1]);
for k from 2 to n-1 do
 print(NoNL,"+".q[k]);
end_for:
print(Unquoted,"+".q[n]);
end_if:
end_proc:
```

Für unser Beispiel ergibt sich:

```
Stammbrueche(3,7);

3/7 = 1/3+1/11+1/231
```

Das Verfahren ist nicht optimal. Ein berühmtes Gegenbeispiel ist:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{59}{120}$$

Der Algorithmus liefert eine Summe von vier Stammbrüchen:

```
Stammbrueche(59, 120);

59/120 = 1/3+1/7+1/65+1/10920
```

2.4 Liste

```
Zerlegung in Stammbrüche
________________________

geordnet nach Nennern

Nenner = 1
1/1 = 1

Nenner = 2
1/2 = 1/2
2/2 = 1

Nenner = 3
1/3 = 1/3
2/3 = 1/2+1/6
3/3 = 1

Nenner = 4
1/4 = 1/4
2/4 = 1/2
3/4 = 1/2+1/4
4/4 = 1

Nenner = 5
1/5 = 1/5
2/5 = 1/3+1/15
3/5 = 1/2+1/10
4/5 = 1/2+1/4+1/20
5/5 = 1

Nenner = 6
1/6 = 1/6
2/6 = 1/3
3/6 = 1/2
4/6 = 1/2+1/6
5/6 = 1/2+1/3
6/6 = 1

Nenner = 7
1/7 = 1/7
2/7 = 1/4+1/28
3/7 = 1/3+1/11+1/231
4/7 = 1/2+1/14
5/7 = 1/2+1/5+1/70
6/7 = 1/2+1/3+1/42
7/7 = 1

Nenner = 8
1/8 = 1/8
2/8 = 1/4
3/8 = 1/3+1/24
4/8 = 1/2
```

```
5/8 = 1/2+1/8
6/8 = 1/2+1/4
7/8 = 1/2+1/3+1/24
8/8 = 1

Nenner = 9
1/9 = 1/9
2/9 = 1/5+1/45
3/9 = 1/3
4/9 = 1/3+1/9
5/9 = 1/2+1/18
6/9 = 1/2+1/6
7/9 = 1/2+1/4+1/36
8/9 = 1/2+1/3+1/18
9/9 = 1

Nenner = 10
1/10 = 1/10
2/10 = 1/5
3/10 = 1/4+1/20
4/10 = 1/3+1/15
5/10 = 1/2
6/10 = 1/2+1/10
7/10 = 1/2+1/5
8/10 = 1/2+1/4+1/20
9/10 = 1/2+1/3+1/15
10/10 = 1

Nenner = 11
1/11 = 1/11
2/11 = 1/6+1/66
3/11 = 1/4+1/44
4/11 = 1/3+1/33
5/11 = 1/3+1/9+1/99
6/11 = 1/2+1/22
7/11 = 1/2+1/8+1/88
8/11 = 1/2+1/5+1/37+1/4070
9/11 = 1/2+1/4+1/15+1/660
10/11 = 1/2+1/3+1/14+1/231
11/11 = 1

Nenner = 12
1/12 = 1/12
2/12 = 1/6
3/12 = 1/4
4/12 = 1/3
5/12 = 1/3+1/12
6/12 = 1/2
7/12 = 1/2+1/12
8/12 = 1/2+1/6
9/12 = 1/2+1/4
10/12 = 1/2+1/3
11/12 = 1/2+1/3+1/12
12/12 = 1
```

```
Nenner = 13
1/13 = 1/13
2/13 = 1/7+1/91
3/13 = 1/5+1/33+1/2145
4/13 = 1/4+1/18+1/468
5/13 = 1/3+1/20+1/780
6/13 = 1/3+1/8+1/312
7/13 = 1/2+1/26
8/13 = 1/2+1/9+1/234
9/13 = 1/2+1/6+1/39
10/13 = 1/2+1/4+1/52
11/13 = 1/2+1/3+1/78
12/13 = 1/2+1/3+1/12+1/156
13/13 = 1

Nenner = 14
1/14 = 1/14
2/14 = 1/7
3/14 = 1/5+1/70
4/14 = 1/4+1/28
5/14 = 1/3+1/42
6/14 = 1/3+1/11+1/231
7/14 = 1/2
8/14 = 1/2+1/14
9/14 = 1/2+1/7
10/14 = 1/2+1/5+1/70
11/14 = 1/2+1/4+1/28
12/14 = 1/2+1/3+1/42
13/14 = 1/2+1/3+1/11+1/231
14/14 = 1

Nenner = 15
1/15 = 1/15
2/15 = 1/8+1/120
3/15 = 1/5
4/15 = 1/4+1/60
5/15 = 1/3
6/15 = 1/3+1/15
7/15 = 1/3+1/8+1/120
8/15 = 1/2+1/30
9/15 = 1/2+1/10
10/15 = 1/2+1/6
11/15 = 1/2+1/5+1/30
12/15 = 1/2+1/4+1/20
13/15 = 1/2+1/3+1/30
14/15 = 1/2+1/3+1/10
15/15 = 1

Nenner = 16
1/16 = 1/16
2/16 = 1/8
3/16 = 1/6+1/48
4/16 = 1/4
5/16 = 1/4+1/16
6/16 = 1/3+1/24
```

```
7/16 = 1/3+1/10+1/240
8/16 = 1/2
9/16 = 1/2+1/16
10/16 = 1/2+1/8
11/16 = 1/2+1/6+1/48
12/16 = 1/2+1/4
13/16 = 1/2+1/4+1/16
14/16 = 1/2+1/3+1/24
15/16 = 1/2+1/3+1/10+1/240
16/16 = 1

Nenner = 17
1/17 = 1/17
2/17 = 1/9+1/153
3/17 = 1/6+1/102
4/17 = 1/5+1/29+1/1233+1/3039345
5/17 = 1/4+1/23+1/1564
6/17 = 1/3+1/51
7/17 = 1/3+1/13+1/663
8/17 = 1/3+1/8+1/82+1/16728
9/17 = 1/2+1/34
10/17 = 1/2+1/12+1/204
11/17 = 1/2+1/7+1/238
12/17 = 1/2+1/5+1/170
13/17 = 1/2+1/4+1/68
14/17 = 1/2+1/4+1/14+1/476
15/17 = 1/2+1/3+1/21+1/714
16/17 = 1/2+1/3+1/10+1/128+1/32640
17/17 = 1

Nenner = 18
1/18 = 1/18
2/18 = 1/9
3/18 = 1/6
4/18 = 1/5+1/45
5/18 = 1/4+1/36
6/18 = 1/3
7/18 = 1/3+1/18
8/18 = 1/3+1/9
9/18 = 1/2
10/18 = 1/2+1/18
11/18 = 1/2+1/9
12/18 = 1/2+1/6
13/18 = 1/2+1/5+1/45
14/18 = 1/2+1/4+1/36
15/18 = 1/2+1/3
16/18 = 1/2+1/3+1/18
17/18 = 1/2+1/3+1/9
18/18 = 1

Nenner = 19
1/19 = 1/19
2/19 = 1/10+1/190
3/19 = 1/7+1/67+1/8911
4/19 = 1/5+1/95
```

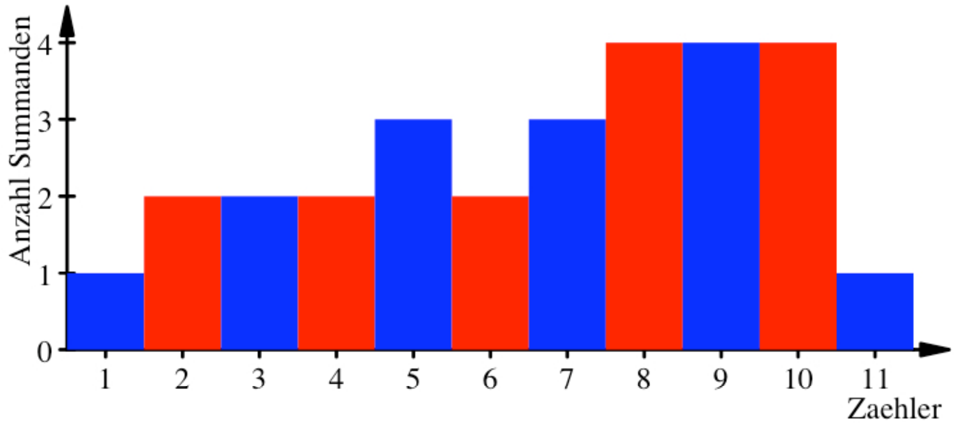
```
5/19 = 1/4+1/76
6/19 = 1/4+1/16+1/304
7/19 = 1/3+1/29+1/1653
8/19 = 1/3+1/12+1/228
9/19 = 1/3+1/8+1/66+1/5016
10/19 = 1/2+1/38
11/19 = 1/2+1/13+1/494
12/19 = 1/2+1/8+1/152
13/19 = 1/2+1/6+1/57
14/19 = 1/2+1/5+1/28+1/887+1/2359420
15/19 = 1/2+1/4+1/26+1/988
16/19 = 1/2+1/3+1/114
17/19 = 1/2+1/3+1/17+1/388+1/375972
18/19 = 1/2+1/3+1/9+1/342
19/19 = 1

Nenner = 20
1/20 = 1/20
2/20 = 1/10
3/20 = 1/7+1/140
4/20 = 1/5
5/20 = 1/4
6/20 = 1/4+1/20
7/20 = 1/3+1/60
8/20 = 1/3+1/15
9/20 = 1/3+1/9+1/180
10/20 = 1/2
11/20 = 1/2+1/20
12/20 = 1/2+1/10
13/20 = 1/2+1/7+1/140
14/20 = 1/2+1/5
15/20 = 1/2+1/4
16/20 = 1/2+1/4+1/20
17/20 = 1/2+1/3+1/60
18/20 = 1/2+1/3+1/15
19/20 = 1/2+1/3+1/9+1/180
20/20 = 1
```

2.5 Anzahl der Stammbrüche

2.5.1 Bei gegebenen Nenner

Wir sehen, dass wir bei unserem Algorithmus mit relativ wenigen Stammbrüchen auskommen. Innerhalb eines gegebenen Nenners variiert die Anzahl der benötigten Stammbrüche bei verschiedenen Zählern.

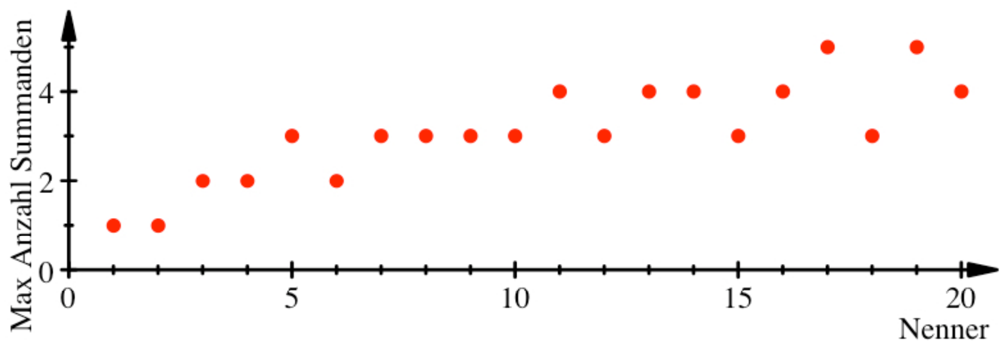
Für den Nenner 11 beispielsweise variiert die Anzahl der Stammbrüche zwischen 1 und 4. Dies wird im folgenden Diagramm dargestellt:



Anzahl der Stammbrüche beim Nenner 11

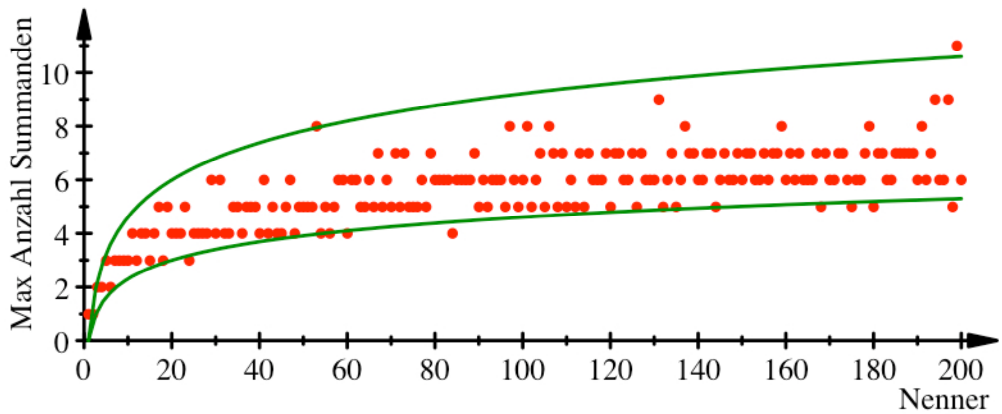
2.5.2 Maximale Anzahl

Im folgenden Diagramm wird zu gegebenem Nenner die maximale Anzahl der benötigten Stammbrüche dargestellt. Die Nenner laufen von 1 bis 20.



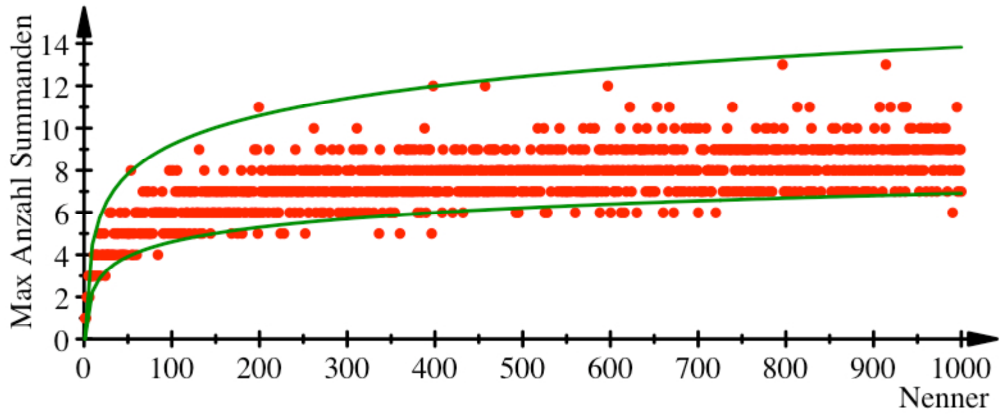
Maximale Anzahl der Stammbrüche

Im folgenden Diagramm wird die Situation für Nenner von 1 bis 200 dargestellt. Die untere grüne Kurve ist der Graf der Funktion $t \mapsto \ln(t)$, die obere der Graf der Funktion $t \mapsto \ln\left(t^2\right)$.



Nenner von 1 bis 200

Im Folgenden das Diagramm für Nenner von 1 bis 1000.



Nenner von 1 bis 1000

2.6 Brüche größer als eins

Der Algorithmus funktioniert auch bei Brüchen größer als eins und liefert ein eigenartiges Resultat, wie die Beispielfolge zeigt:

```
3/7  =         1/3+1/11+1/231
10/7 =        1+1/3+1/11+1/231
17/7 =      1+1+1/3+1/11+1/231
24/7 =    1+1+1+1/3+1/11+1/231
31/7 =  1+1+1+1+1/3+1/11+1/231
```

Der ganzzahlige Anteil wird in Einsen aufgedröselt.

2.7 Das Basler Problem

Nach Euler ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Das ist die Lösung des so genannten Basler Problems.

Wir können nun versuchen, unseren Algorithmus auf den „Bruch“ $\frac{\pi^2}{6}$ anzuwenden. Natürlich muss das schief gehen, da der „Bruch“ irrational ist und die Stellenanzahl des Computers beschränkt. Wir erhalten:

Erster Versuch:

```
Stammbrueche(PI^2, 6);

Error: Division by zero [_power];
during evaluation of 'ceil'
```

Zweiter Versuch: Wir ersetzen π durch eine Dezimalzahl mit 20 Stellen.

```
Stammbrueche(float(PI^2), 6);

9.8696044010893586188/6 =
1+1/2+1/7+1/482+1/447389+1/322140653777
+1/130370586212598241166765
+1/54572818080363359463254991838265141002061742080
```

3 Alternierende Summen

3.1 Z'vill isch z'vill

Wir gehen nun so vor, dass wir zu einem gegebenen Bruch den kleinsten Stammbruch nehmen, der noch größer oder gleich wie der gegebene Bruch ist. Diesen kleinsten Stammbruch finden wir, indem wir den Kehrwert des gegebenen Bruches auf die nächste ganze Zahl abrunden, und davon wieder den Kehrwert nehmen.

Beispiel:

$$\tfrac{4}{11} \mapsto \left\lfloor \tfrac{11}{4} \right\rfloor = 2 \mapsto \tfrac{1}{2}$$

Somit ist $\frac{1}{2}$ der kleinste Stammbruch größer oder gleich $\frac{3}{7}$.

Zum Überschuss nehmen wir wieder den kleinsten Stammbruch größer oder gleich dem Überschuss. Diesen Stammbruch zählen wir ab. Und so weiter und so fort mit alternierenden Vorzeichen. Dabei hoffen wir, dass es einmal „aufgeht" im Sinne, dass der Überschuss ein Stammbruch wird.

In unserem Beispiel:

$$\begin{aligned} &\tfrac{4}{11} \mapsto \left\lfloor \tfrac{11}{4} \right\rfloor = 2 \mapsto \tfrac{1}{2} \\ &\tfrac{1}{2} - \tfrac{4}{11} = \tfrac{3}{22} \mapsto \left\lfloor \tfrac{22}{3} \right\rfloor = 7 \mapsto \tfrac{1}{7} \\ &\tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{22} = \tfrac{1}{154} \quad \text{Stammbruch!} \end{aligned}$$

Somit haben wir eine alternierende Stammbruchzerlegung:

$$\tfrac{4}{11} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{154}$$

3.2 Formal

Es sei $\frac{a}{b}, a < b$, der zu zerlegende Bruch. Dann arbeiten wir mit der folgenden Rekursion.

Start:

$$r_1 = \tfrac{a}{b}$$

Rekursionsformel:

$$q_n = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{r_n} \right\rfloor}$$

$$r_{n+1} = q_n - r_n$$

Abbruchkriterium: Wir hören auf, sobald $r_n = q_n$, also $r_{n+1} = 0$.

Wir erhalten die Stammbruchzerlegung:

$$\tfrac{a}{b} = \sum_{n=1}^{\text{Abbruch}} (-1)^{n-1} q_n$$

Dieser Algorithmus entsteht aus dem gierigen Algorithmus durch Vertauschen der Begriffe *mindestens* und *höchstens*. Weiter muss mit alternierendem Vorzeichen addiert werden. Der Leser oder die Leserin kann sich selber für diesen Algorithmus eine Bezeichnung aus dem kulinarischen Bereich ausdenken.

3.3 Liste

```
Zerlegung in Stammbrüche
________________________

geordnet nach Nennern

Nenner = 1
1/1 = 1

Nenner = 2
1/2 = 1/2
2/2 = 1

Nenner = 3
1/3 = 1/3
2/3 = 1-1/3
3/3 = 1

Nenner = 4
1/4 = 1/4
2/4 = 1/2
3/4 = 1-1/4
4/4 = 1

Nenner = 5
1/5 = 1/5
2/5 = 1/2-1/10
3/5 = 1-1/2+1/10
4/5 = 1-1/5
5/5 = 1

Nenner = 6
1/6 = 1/6
2/6 = 1/3
3/6 = 1/2
4/6 = 1-1/3
5/6 = 1-1/6
6/6 = 1

Nenner = 7
1/7 = 1/7
```

```
2/7 = 1/3-1/21
3/7 = 1/2-1/14
4/7 = 1-1/2+1/14
5/7 = 1-1/3+1/21
6/7 = 1-1/7
7/7 = 1

Nenner = 8
1/8 = 1/8
2/8 = 1/4
3/8 = 1/2-1/8
4/8 = 1/2
5/8 = 1-1/2+1/8
6/8 = 1-1/4
7/8 = 1-1/8
8/8 = 1

Nenner = 9
1/9 = 1/9
2/9 = 1/4-1/36
3/9 = 1/3
4/9 = 1/2-1/18
5/9 = 1-1/2+1/18
6/9 = 1-1/3
7/9 = 1-1/4+1/36
8/9 = 1-1/9
9/9 = 1

Nenner = 10
1/10 = 1/10
2/10 = 1/5
3/10 = 1/3-1/30
4/10 = 1/2-1/10
5/10 = 1/2
6/10 = 1-1/2+1/10
7/10 = 1-1/3+1/30
8/10 = 1-1/5
9/10 = 1-1/10
10/10 = 1

Nenner = 11
1/11 = 1/11
2/11 = 1/5-1/55
3/11 = 1/3-1/16+1/528
4/11 = 1/2-1/7+1/154
5/11 = 1/2-1/22
6/11 = 1-1/2+1/22
7/11 = 1-1/2+1/7-1/154
8/11 = 1-1/3+1/16-1/528
9/11 = 1-1/5+1/55
10/11 = 1-1/11
11/11 = 1

Nenner = 12
1/12 = 1/12
```

```
2/12 = 1/6
3/12 = 1/4
4/12 = 1/3
5/12 = 1/2-1/12
6/12 = 1/2
7/12 = 1-1/2+1/12
8/12 = 1-1/3
9/12 = 1-1/4
10/12 = 1-1/6
11/12 = 1-1/12
12/12 = 1

Nenner = 13
1/13 = 1/13
2/13 = 1/6-1/78
3/13 = 1/4-1/52
4/13 = 1/3-1/39
5/13 = 1/2-1/8+1/104
6/13 = 1/2-1/26
7/13 = 1-1/2+1/26
8/13 = 1-1/2+1/8-1/104
9/13 = 1-1/3+1/39
10/13 = 1-1/4+1/52
11/13 = 1-1/6+1/78
12/13 = 1-1/13
13/13 = 1

Nenner = 14
1/14 = 1/14
2/14 = 1/7
3/14 = 1/4-1/28
4/14 = 1/3-1/21
5/14 = 1/2-1/7
6/14 = 1/2-1/14
7/14 = 1/2
8/14 = 1-1/2+1/14
9/14 = 1-1/2+1/7
10/14 = 1-1/3+1/21
11/14 = 1-1/4+1/28
12/14 = 1-1/7
13/14 = 1-1/14
14/14 = 1

Nenner = 15
1/15 = 1/15
2/15 = 1/7-1/105
3/15 = 1/5
4/15 = 1/3-1/15
5/15 = 1/3
6/15 = 1/2-1/10
7/15 = 1/2-1/30
8/15 = 1-1/2+1/30
9/15 = 1-1/2+1/10
10/15 = 1-1/3
11/15 = 1-1/3+1/15
```

```
12/15 = 1-1/5
13/15 = 1-1/7+1/105
14/15 = 1-1/15
15/15 = 1

Nenner = 16
1/16 = 1/16
2/16 = 1/8
3/16 = 1/5-1/80
4/16 = 1/4
5/16 = 1/3-1/48
6/16 = 1/2-1/8
7/16 = 1/2-1/16
8/16 = 1/2
9/16 = 1-1/2+1/16
10/16 = 1-1/2+1/8
11/16 = 1-1/3+1/48
12/16 = 1-1/4
13/16 = 1-1/5+1/80
14/16 = 1-1/8
15/16 = 1-1/16
16/16 = 1

Nenner = 17
1/17 = 1/17
2/17 = 1/8-1/136
3/17 = 1/5-1/42+1/3570
4/17 = 1/4-1/68
5/17 = 1/3-1/25+1/1275
6/17 = 1/2-1/6+1/51
7/17 = 1/2-1/11+1/374
8/17 = 1/2-1/34
9/17 = 1-1/2+1/34
10/17 = 1-1/2+1/11-1/374
11/17 = 1-1/2+1/6-1/51
12/17 = 1-1/3+1/25-1/1275
13/17 = 1-1/4+1/68
14/17 = 1-1/5+1/42-1/3570
15/17 = 1-1/8+1/136
16/17 = 1-1/17
17/17 = 1

Nenner = 18
1/18 = 1/18
2/18 = 1/9
3/18 = 1/6
4/18 = 1/4-1/36
5/18 = 1/3-1/18
6/18 = 1/3
7/18 = 1/2-1/9
8/18 = 1/2-1/18
9/18 = 1/2
10/18 = 1-1/2+1/18
11/18 = 1-1/2+1/9
12/18 = 1-1/3
```

```
13/18 = 1-1/3+1/18
14/18 = 1-1/4+1/36
15/18 = 1-1/6
16/18 = 1-1/9
17/18 = 1-1/18
18/18 = 1

Nenner = 19
1/19 = 1/19
2/19 = 1/9-1/171
3/19 = 1/6-1/114
4/19 = 1/4-1/25+1/1900
5/19 = 1/3-1/14+1/798
6/19 = 1/3-1/57
7/19 = 1/2-1/7+1/88-1/11704
8/19 = 1/2-1/12+1/228
9/19 = 1/2-1/38
10/19 = 1-1/2+1/38
11/19 = 1-1/2+1/12-1/228
12/19 = 1-1/2+1/7-1/88+1/11704
13/19 = 1-1/3+1/57
14/19 = 1-1/3+1/14-1/798
15/19 = 1-1/4+1/25-1/1900
16/19 = 1-1/6+1/114
17/19 = 1-1/9+1/171
18/19 = 1-1/19
19/19 = 1

Nenner = 20
1/20 = 1/20
2/20 = 1/10
3/20 = 1/6-1/60
4/20 = 1/5
5/20 = 1/4
6/20 = 1/3-1/30
7/20 = 1/2-1/6+1/60
8/20 = 1/2-1/10
9/20 = 1/2-1/20
10/20 = 1/2
11/20 = 1-1/2+1/20
12/20 = 1-1/2+1/10
13/20 = 1-1/2+1/6-1/60
14/20 = 1-1/3+1/30
15/20 = 1-1/4
16/20 = 1-1/5
17/20 = 1-1/6+1/60
18/20 = 1-1/10
19/20 = 1-1/20
20/20 = 1
```

3.4 Die Formel von Leibniz

Sie lautet:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Da haben wir alternierendes Vorzeichen.

Wir setzen nun den „Bruch“ $\frac{\pi}{4}$ in den alternierenden Algorithmus ein:

```
Stammbrueche(float(PI),4);

3.141592654/4 =
1-1/4+1/28-1/3163+1/30091756-
1/1611843016646488+1/59510565713866219235349062746112
```

Da $\frac{\pi}{4}$ irrational ist, haben wir wie beim Basler Problem ein unsinniges Beispiel.

4 Vergleich der beiden Verfahren

4.1 Nenner 19

Wir vergleichen exemplarisch die Resultate bei Brüchen mit dem Nenner 19.

Der gierige Algorithmus liefert:

```
Nenner = 19
1/19 = 1/19
2/19 = 1/10+1/190
3/19 = 1/7+1/67+1/8911
4/19 = 1/5+1/95
5/19 = 1/4+1/76
6/19 = 1/4+1/16+1/304
7/19 = 1/3+1/29+1/1653
8/19 = 1/3+1/12+1/228
9/19 = 1/3+1/8+1/66+1/5016
10/19 = 1/2+1/38
11/19 = 1/2+1/13+1/494
12/19 = 1/2+1/8+1/152
13/19 = 1/2+1/6+1/57
14/19 = 1/2+1/5+1/28+1/887+1/2359420
15/19 = 1/2+1/4+1/26+1/988
16/19 = 1/2+1/3+1/114
17/19 = 1/2+1/3+1/17+1/388+1/375972
18/19 = 1/2+1/3+1/9+1/342
19/19 = 1
```

Der alternierende Algorithmus liefert:

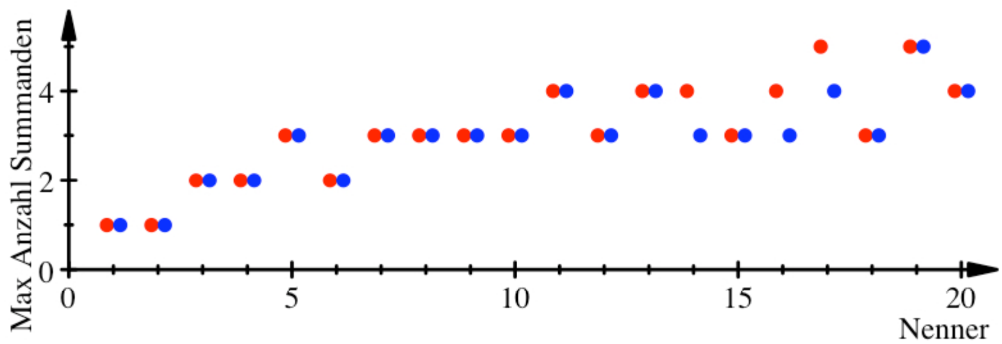
```
Nenner = 19
1/19 = 1/19
```

```
2/19 = 1/9-1/171
3/19 = 1/6-1/114
4/19 = 1/4-1/25+1/1900
5/19 = 1/3-1/14+1/798
6/19 = 1/3-1/57
7/19 = 1/2-1/7+1/88-1/11704
8/19 = 1/2-1/12+1/228
9/19 = 1/2-1/38
10/19 = 1-1/2+1/38
11/19 = 1-1/2+1/12-1/228
12/19 = 1-1/2+1/7-1/88+1/11704
13/19 = 1-1/3+1/57
14/19 = 1-1/3+1/14-1/798
15/19 = 1-1/4+1/25-1/1900
16/19 = 1-1/6+1/114
17/19 = 1-1/9+1/171
18/19 = 1-1/19
19/19 = 1
```

Wir sehen unterschiedliche Profile. Die Maximalzahl der benötigten Stammbrüche ist bei beiden Verfahren 5.

4.2 Maximale Anzahl

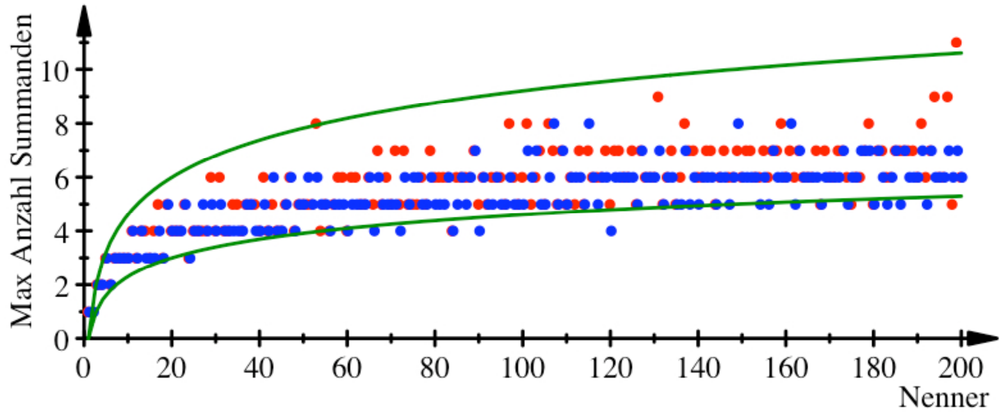
Im folgenden Diagramm wird zu gegebenem Nenner die maximale Anzahl der benötigten Stammbrüche dargestellt, für den gierigen Algorithmus in rot, für den alternierenden Algorithmus in blau, seitlich etwas versetzt. Die Nenner laufen von 1 bis 20.



Maximalzahlen der benötigten Stammbrüche

Wir sehen, dass die beiden Verfahren fast immer zur selben Maximalzahl führen, Ausnahmen sind die Nenner 14, 16 und 17, in denen der alternierende Algorithmus besser ist.

Im Großversuch sehen wir, dass allerdings der gierige Algorithmus auch besser sein kann.



Großversuch