Hans Walser, [20140114]

# Spielwürfel

Anregung: A. L., S.

## 1 Wie viele gibt es?

Wie viele Spielwürfel gibt es unter der Bedingung, dass die Summe der Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seiten immer 7 betragen soll?

## 2 Die Lösung

Es gibt 16 Spielwürfel. Die Abbildung 1 illustriert die 16 Beispiele unter relevanter Sicht.

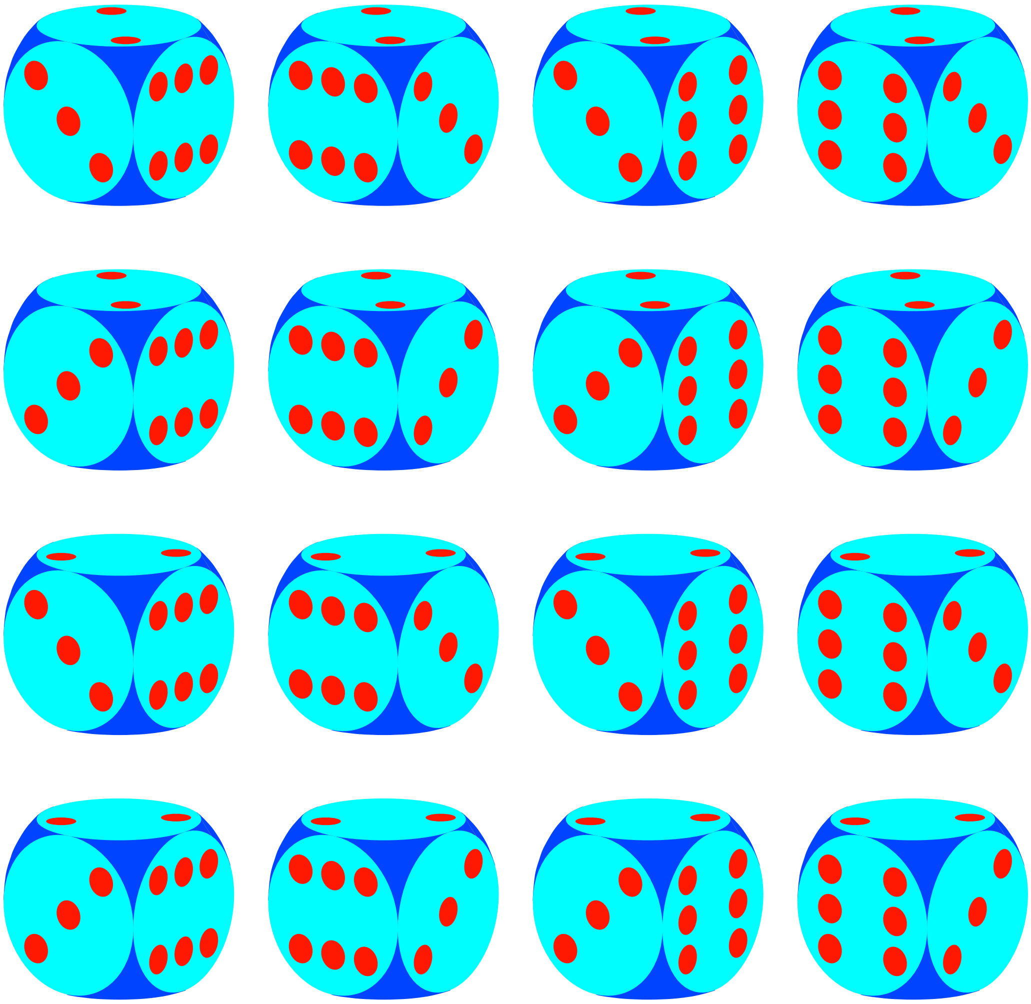

Abb. 1: Die 16 Spielwürfel

## 3 Begründung

### 3.1 Zahlverteilungen

Wir überlegen zunächst die Zahlverteilungen, ohne Rücksicht auf die Darstellung der Zahlen im Augensystem.

Die Zahlen 1 und 2 ergänzen sich nicht auf 7, sie können also nicht auf gegenüberliegenden Würfelseiten liegen. Daher liegen sie auf Würfelseiten, welche aneinanderstoßen, also eine Würfelkante gemeinsam haben. Ebenso haben die Würfelseiten mit den Zahlen 1 und 3 eine Würfelkante gemeinsam und schließlich auch die Würfelseiten mit den Zahlen 2 und 3. Das heißt, dass die Würfelseiten mit den Zahlen 1, 2 und 3 an einer Ecke zusammenstoßen (Abb. 2). Sie können das entweder im Uhrzeigersinn (Abb. 2a) oder im Gegenuhrzeigersinn (Abb. 2b) tun.

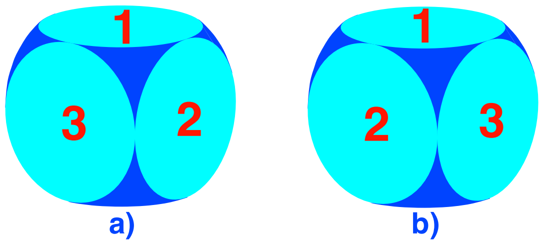


**Abb. 2: Die Zahlen 1, 2 und 3**

Durch die Position der Zahlen 1, 2 und 3 ist aber auch die Position ihrer Ergänzungszahlen 6, 5 und 4 festgelegt. Es gibt also nur zwei Möglichkeiten, wie die Zahlen 1 bis 6 auf dem Würfel verteilt werden können. Diese beiden Möglichkeiten sind spiegelbildlich.

### 3.2 Symbolische Darstellung mit Augen

Die Zahlen 1, 4 und 5 haben eine symbolische Darstellung mit Augen, welche je eine vierteilige Drehsymmetrie aufweist. Die Symbole können also nur auf je eine Art auf einer Würfelseite platziert werden (Abb. 3).

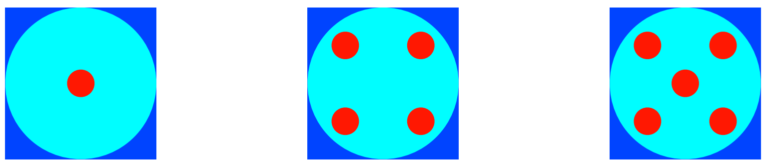

**Abb. 3: Augenzahlen 1, 4 und 5**

Anders mit der symbolischen Darstellung für die Zahlen 2, 3 und 6. Hier gibt es je zwei Anordnungsmöglichkeiten (Abb. 4).

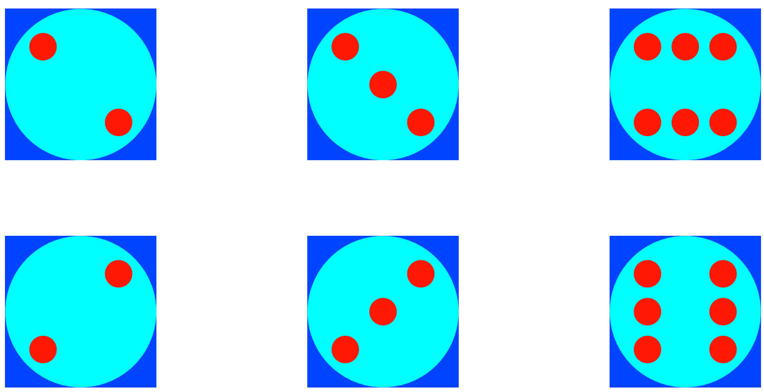

**Abb. 4: Augenzahlen 2, 3, und 6**

### 3.3 Anzahl Spielwürfel

Wir haben jetzt also 2 Möglichkeiten der Anordnung der Zahlen, sowie für die drei Zahlen 2, 3 und 6 je zwei Möglichkeiten, die symbolische Darstellung mit Augen auf einer Würfelseite zu platzieren. Damit ist die Gesamtzahl der möglichen Spielwürfel:

$$\text{Anzahl Spielwürfel} = 2 \cdot 2^3 = 16$$

In der Abbildung 1 ist das so illustriert, dass wir jeweils den Spielwürfel über die Ecke ansehen, an der die Würfelseiten mit den Zahlen 2, 3 und 6 zusammenstoßen.

Die Abbildung 5 zeigt drei der 16 Möglichkeiten.

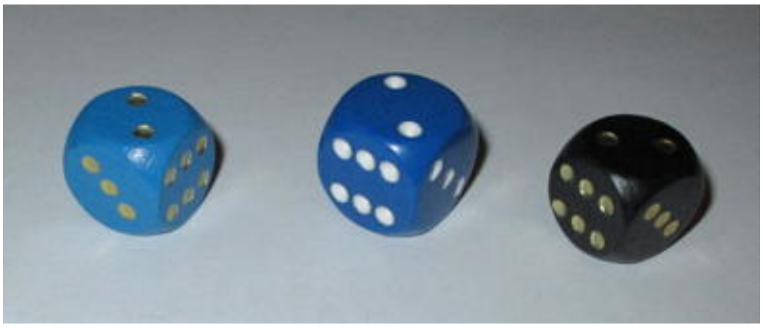

**Abb. 5: Unterschiedliche Spielwürfel**

## 4 Varianten

### 4.1 Arabische Zahlen

Wenn wir den Spielwürfel mit arabischen Zahlen (korrekt wäre, von indischen Zahlen zu reden) belegen, und zwar so, dass die Schreibzeile der Zahlen jeweils parallel zu einer Würfelkante ist, ergeben sich für jede Zahl vier Platzierungsmöglichkeiten. Somit haben wir insgesamt $2 \cdot 6^4 = 2592$ Möglichkeiten. Wir sehen, dass die symbolische Darstellung mit Augen aus Symmetriegründen stark vereinfacht.

### 4.2 Keine Siebener-Bedingung

Wenn wir auf die Bedingung verzichten, dass die Summe der Augenzahlen auf gegenüberliegenden Seiten immer 7 betragen soll, gibt es zunächst 30 Möglichkeiten, die Zahlen 1 bis 6 auf Würfelseiten zu platzieren. Dies kann so eingesehen werden: Wir denken uns oben die 1. Dann gibt es noch 5 freie Würfelseiten, die mit den Zahlen 2 bis 6 belegt werden können. Das gibt 5! = 120 Möglichkeiten. Allerdings haben wir jetzt jede Möglichkeit vier Mal gezählt, da wir den Würfel um die senkrechte Achse um 90°, 180° oder 270° drehen können. Somit gibt es nur 120/4 = 30 Möglichkeiten. Da wir für die symbolische Darstellung der Zahlen 2, 3 und 6 je zwei Möglichkeiten haben, ergeben sich insgesamt $30 \cdot 2^3 = 240$ Möglichkeiten.

### 4.3 Buchstabenwürfel

Als Beispiel belegen wir die Würfelseiten mit Buchstaben gemäß Abbildung 6.

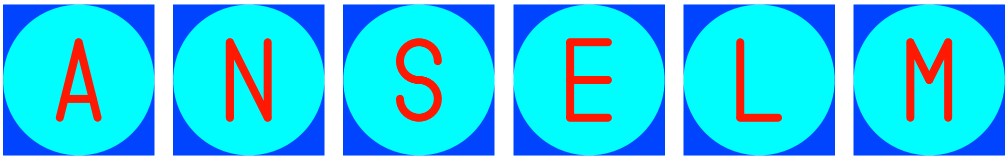


**Abb. 6: Buchstaben**

Für die Buchstaben A, E, L, M haben wir nun je vier Platzierungsmöglichkeiten, für die Buchstaben N und S wegen der Punktsymmetrie nur je zwei. Die Gesamtzahl der Spielwürfel ist nun $30 \cdot 4^4 \cdot 2^2 = 30720$.