Hans Walser, [20150801]

## Sphärische Vielecke

Anregung: H. E., P.

### 1 Worum geht es?

Die Flächenformel für sphärische Vielecke, insbesondere sphärische Dreiecke, lässt sich einfach und konsistent mit Hilfe der Außenwinkel herleiten.

### 2 Sphärisches Dreieck

Die Abbildung 1 zeigt ein sphärisches Dreieck mit der üblichen Bezeichnung.

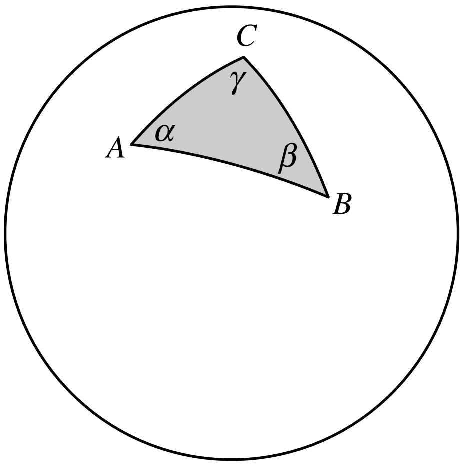


**Abb. 1: Sphärisches Dreieck**

Ein sphärisches Dreieck ist durch drei Großkreise begrenzt (Abb. 2).

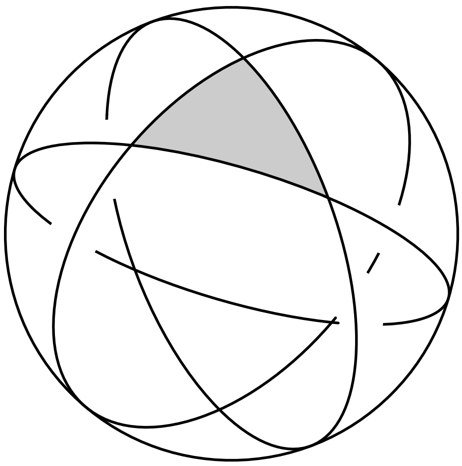

**Abb. 2: Drei Großkreise**

Die drei Großkreise begrenzen insgesamt acht sphärische Dreiecke, darunter insbesondere das Gegendreieck zum ursprünglichen Dreieck (Abb. 3). Das Gegendreieck ist punktsymmetrisch zum ursprünglichen Dreieck. Symmetriezentrum ist der Kugelmittelpunkt. Das Gegendreieck ist also kongruent und insbesondere flächengleich zum ursprünglichen Dreieck. Es hat – für unsere Überlegungen aber nicht relevant – ungleiche Orientierung zum ursprünglichen Dreieck. Dies liegt daran, dass die Punktspiegelung im Raum die Orientierung umkehrt.

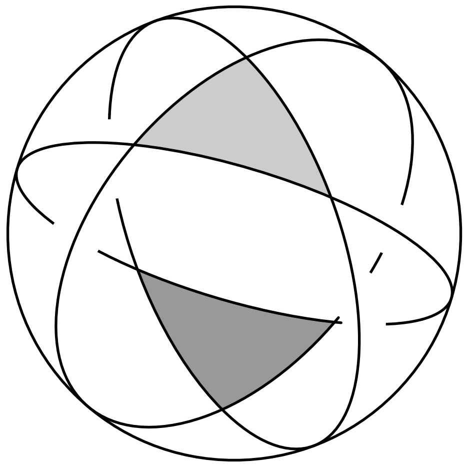

**Abb. 3: Gegendreieck**

Und nun trennen wir auf jedem Großkreis einen Bogen heraus (Abb. 4). Übrig bleiben das Dreieck, sein Gegendreieck sowie drei zu den Außenwinkeln gehörende sphärische Zweiecke.

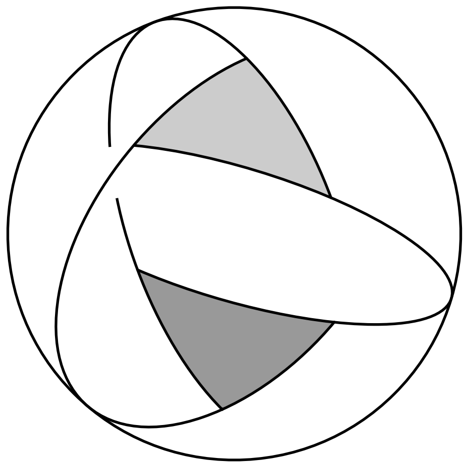

**Abb. 4: Dreieck, Gegendreieck und drei Zweiecke**

Die Abbildung 5 zeigt die Vorderseite in Farbe und mit den Beschriftungen der Außenwinkel.

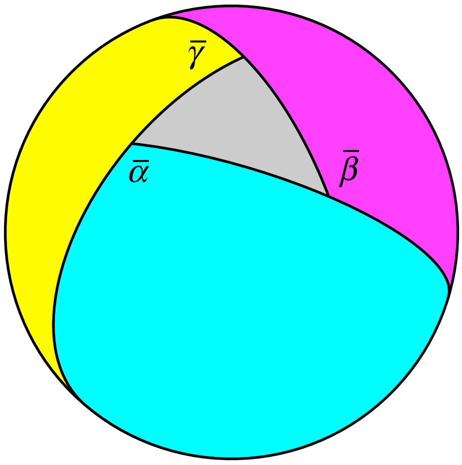


**Abb. 5: Die drei Zweiecke**

Und nun zur Flächenberechnung. Auf einer Kugel mit dem Radius $r$ hat das zum Außenwinkel $\bar{\alpha}$ gehörende Zweieck den Flächenanteil:

$$f_{\bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}}{2\pi} 4\pi r^2 = 2\bar{\alpha} r^2$$

Die gesamte Kugeloberfläche wir genau zugedeckt durch das Dreieck, sein flächengleiches Gegendreieck und die drei Außenwinkelzweiecke. Somit ist:

$$4\pi r^2 = 2 f_{\text{Dreieck}} + 2\bar{\alpha} r^2 + 2\bar{\beta} r^2 + 2\bar{\gamma} r^2$$

Daraus ergibt sich die Flächenformel:

$$f_{\text{Dreieck}} = r^2 \left( 2\pi - \left( \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} \right) \right) \tag{1}$$

Die Dreiecksfläche ist also bis auf den Faktor $r^2$ die Ergänzung der Außenwinkelsumme auf den vollen Winkel $2\pi$.

In der sphärischen Geometrie ist die Außenwinkelsumme kleiner als der volle Winkel $2\pi$.

Wer es aus Traditionsgründen doch lieber mit den Innenwinkeln hat, setzt $\bar{\alpha} = \pi - \alpha$, $\bar{\beta} = \pi - \beta$ und $\bar{\gamma} = \pi - \gamma$ in (1) ein und erhält die übliche Formel:

$$f_{\text{Dreieck}} = r^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi) \tag{2}$$

## 3 Modell

Die Abbildung 6 zeigt ein Modell aus Halbkarton. Es besteht aus drei Kreisscheiben, welche längs eines Durchmessers zu einem Zweieck gefaltet werden.

**Abb. 6: Modell**

Die drei Zweiecke werden mit Büroklammern verheftet. Dazwischen entsteht als Loch das sphärische Dreieck.

Mit dieser Technik kann stufenlos jedes beliebige sphärische Dreieck dargestellt werden.

Über dem sphärischen Dreieck haben wir nach innen eine Pyramide mit der Spitze im Kugelzentrum. Über dem Gegendreieck gibt es eine punktgespiegelte Gegenpyramide.

Dies ist Anlass zu einer kleinen Volumenrechnerei. Für das Volumen des zum Außenwinkel $\overline{\alpha}$ gehörenden Zweieck-Schnitzes gilt:

$$V_{\text{Schnitz}} = \frac{\overline{\alpha}}{2\pi}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\overline{\alpha} r^3$$

Die ganze Kugel setzt sich zusammen aus der Pyramide, der Gegenpyramide und den drei Außenwinkelschnitzen:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2V_{\text{Pyramide}} + \frac{2}{3}\overline{\alpha} r^3 + \frac{2}{3}\overline{\beta} r^3 + \frac{2}{3}\overline{\gamma} r^3$$

Daraus ergibt sich:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} r^3 \left(2\pi - \left(\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}\right)\right)$$

Wegen (1) ist:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} r r^2 \left(2\pi - \left(\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}\right)\right) = \frac{1}{3} r f_{\text{Dreieck}}$$

Das war zu erwarten.

## 4 Sphärische Vielecke

Für ein sphärisches $n$-Eck geht die Flächen-Überlegung analog zum sphärischen Dreieck. Die Abbildung 7 zeigt die Situation für ein sphärisches Fünfeck.

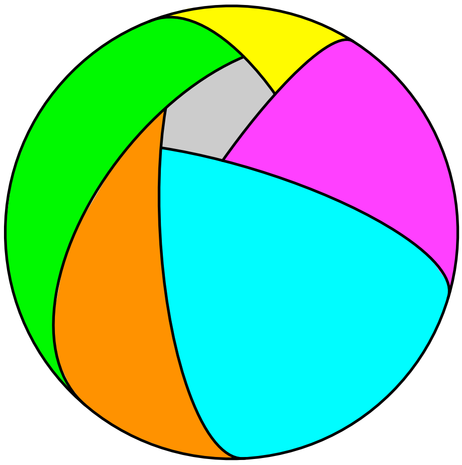

**Abb. 7: Sphärisches Fünfeck**

Mit den Außenwinkeln $\bar{\alpha}_k, k = 1,...,n,$ gilt:

$$4\pi r^2 = 2 f_{n\text{-Eck}} + \sum_{k=1}^{n} 2\bar{\alpha}_k r^2$$

Daraus erhalten wir:

$$f_{n\text{-Eck}} = r^2 \left( 2\pi - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k \right) \qquad (3)$$

Die Vieleckfläche ist also bis auf den Faktor $r^2$ die Ergänzung der Außenwinkelsumme auf den vollen Winkel $2\pi$.

Umrechnen auf Innenwinkel ergibt:

$$f_{n\text{-Eck}} = r^2 \left( \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - (n-2)\pi \right) \qquad (4)$$

## 5 Didaktische Bemerkungen

Nach meiner Erfahrung ist die direkte Flächenberechnung mit den Innenwinkeln schon beim Dreieck recht kompliziert, weil man mit Überlagerungen der Innenwinkelzweiecke arbeiten muss. Die Verallgemeinerung auf das $n$-Eck ist dann nur noch rechnerisch durch Anfügen von Dreiecken induktiv machbar. Eine direkte geometrische Überlegung ist nicht möglich.

Die Außenwinkelformeln (1) und (3) sind konsistent. Die Innenwinkelformeln (2) und (4) enthalten einen Zusatzfaktor, in welchen die Eckenzahl $n$ eingeht.

Einen analogen Sachverhalt haben wir ja schon in der ebenen Geometrie: Die Außenwinkelsumme eines $n$-Ecks ist unabhängig von der Eckenzahl $n$ die Konstante $2\pi$. Für die Innenwinkelsumme gilt eine Formel, die ich mir schon als Schüler nie habe merken können.