

Hans Walser, [20131005]

## Sieb des Eratosthenes

### 1 Worum geht es?

Bearbeitung einer falschen Vermutung über Primzahlen.

### 2 Spiel mit Primzahlen

Jan addiert jeweils zwei aufeinanderfolgende Primzahlen.

Primzahl	Summe aufeinanderfolgender Primzahlen
1	
	3
2	
	5
3	
	8
5	
	12
7	
	18
11	
	24
13	
	30
17	
	36
19	
	42
23	

Er vermutet, dass man bei Weglassen der ersten drei Primzahlen die „Sechserreihe“ 12, 18, 24, ... erhält.

### 3 Gegenbeispiel

Die Vermutung ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

Primzahl	Summe aufeinanderfolgender Primzahlen
1	
	3
2	
	5
3	
	8
5	
	12
7	
	18
11	
	24
13	
	30
17	
	36
19	
	42
23	
	<b>52</b>
29	

#### 4 Einschaltzahlen

Die Vermutung kann modifiziert werden durch Einschalten weiterer Zahlen zwischen den Primzahlen.

Primzahl	Summe aufeinanderfolgender Zahlen
1	
	3
2	
	5
3	
	8
5	
	12
7	
	18
11	
	24
13	
	30
17	
	36
19	
	42
23	
	48
$25 = 5^2$	
	54
29	
	60
31	
	66
$35 = 5*7$	
	72

37	
	78
41	
	84
43	
	90
47	
	96
$49 = 7^2$	
	102
53	
	108
$55 = 5 \cdot 11$	
	114
59	
	120
61	
119	
	240
$121 = 11^2$	
	246
$125 = 5^3$	
	252
127	
	258
131	

Es fällt auf, dass die roten Einschaltzahlen die Primfaktoren 2 und 3 *nicht* enthalten.

## 5 Sieb des Eratosthenes

Wir modifizieren die Idee des Eratosthenes und entfernen aus der Menge der natürlichen Zahlen die Zahlen 2 und 3 sowie die Vielfachen davon. In der Abbildung 1 sind das die zyan unterlegten Zahlen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

**Abb. 1: Entfernte Zahlen**

Dann bleiben folgende Zahlen übrig:

1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, ...

Diese Zahlen sind kongruent 1 modulo 6 oder kongruent 5 modulo 6. Wir haben ein Differenzenmuster 4, 2, 4, 2, 4, 2, ... . Damit kann induktiv gezeigt werden, dass die Summen aufeinanderfolgender solcher Zahlen die Vielfachen von 6 ergeben.