Hans Walser, [20151003]

Sehwinkelproblem

Anregung: Rühenbeck 2015

1 Das Problem

Ein Fahrzeug fährt auf einer Straße in Richtung von x an einem Verkehrsschild der Breite b vorbei, das im Abstand a von der Fahrtrichtung steht (Abb. 1). Wann ist der Sehwinkel ε, unter dem das Schild erscheint, am größten? (Rühenbeck 2015)

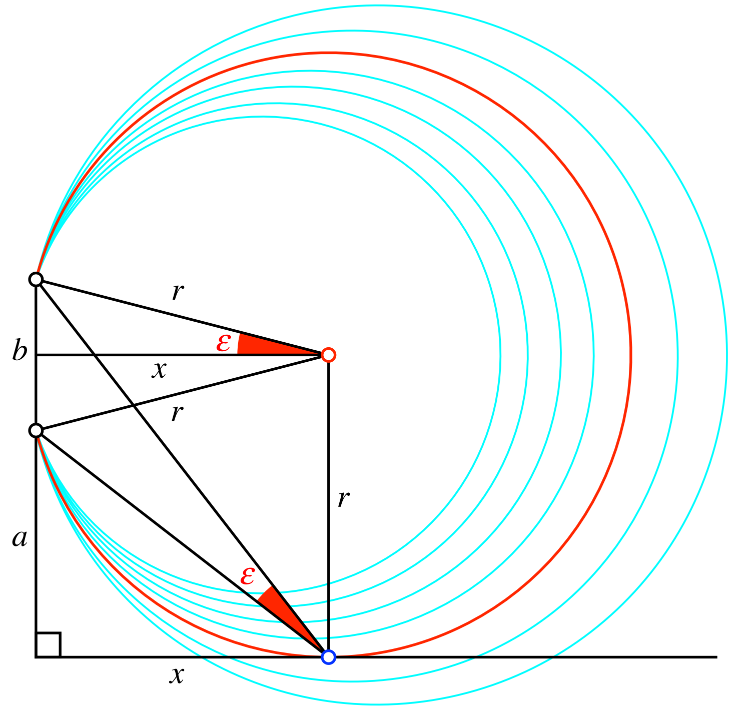

Abb. 1: Optimaler Sehwinkel

2 Klassische Lösung

Unter allen Ortsbogen über der Strecke b suchen wir den kleinsten (entspricht dem größten Winkel), der die Fahrtrichtung gerade noch erreicht, also tangential dazu ist.

Dieser Ortsbogen hat den Radius $r = a + \frac{b}{2}$ und kann daher sehr einfach konstruiert werden. Damit ist die Aufgabe konstruktiv gelöst.

Rechnerisch erhalten wir für x mit Pythagoras:

$$x = \sqrt{\left(a + \tfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a(a+b)} \tag{1}$$

Der optimale Sehwinkel ist der halbe Zentriwinkel des Ortsbogens, also:

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{\frac{b}{2}}{a+\frac{b}{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{2a+b}\right) \tag{2}$$

Das Problem lässt sich mit Mitteln der Sekundarstufe I bearbeiten.

3 Aufwärtskompatibilität

Das Problem ist ein schöner Beispiel des folgenden Extremwertproblems: Gesucht sind Extremwerte einer Funktion $f(x,y)$ (in unserem Beispiel der Sehwinkel) unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=0$ (in unserem Beispiel die Straße).

Die Nebenbedingung beschreibt einen Weg in der *x,y*-Ebene, und gesucht sind die Tangentialstellen zu den Niveaulinien der Funktion $f(x,y)$. Dies führt zur Bedingung, dass die beiden Gradienten linear abhängig sein müssen, also $\nabla f = \lambda \nabla \varphi$. Technisch wird dazu die Hilfsunktion $g(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$ gebildet, deren Gradient verschwinden muss.

Literatur

Rühenbeck, Christian (2015): Sehwinkelproblem. MNU Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 68/5 (15. 9. 2015), S. 308-309.