Hans Walser, [20170408]

Sehnenviereck

Anregung: H. K., O.

1 Worum geht es?

Es werden einige Spielereien um das Sehnenviereck vorgestellt. Dabei benötigen wir den Sachverhalt, dass genau in einem Sehnenviereck sich gegenüberliegende Winkel auf π ergänzen. Über Sehnenvierecke siehe auch [1].

2 Winkelhalbierende in einem beliebigen Viereck

Die Schnittfigur der Winkelhalbierenden eines beliebigen Vierecks ist ein Sehnenviereck (Abb. 1).

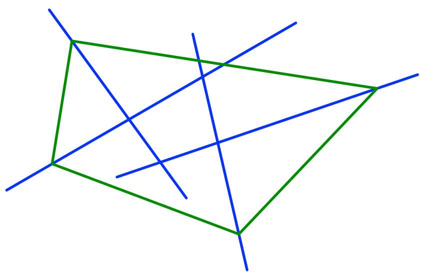

Abb. 1: Winkelhalbierende und Sehnenviereck

Für den rechnerischen Beweis arbeiten wir mit den Bezeichnungen der Abbildung 2.

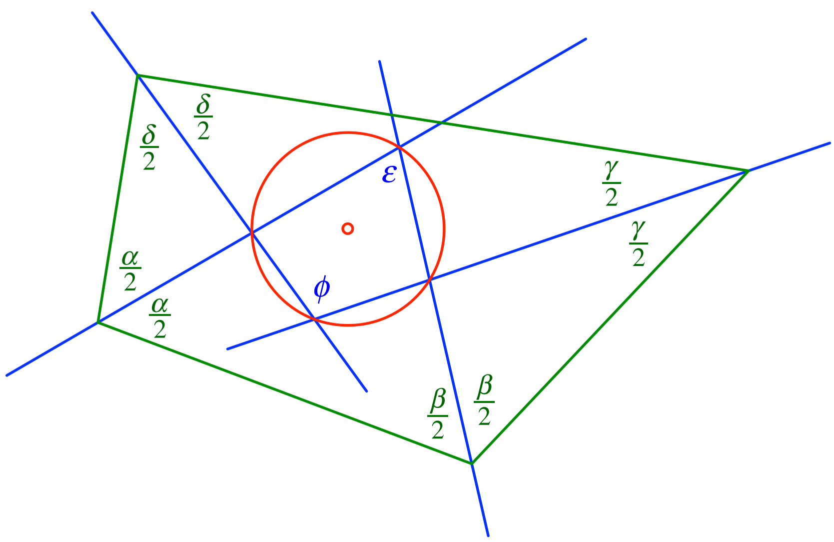

Abb. 2: Bezeichnungen

Es ist:

$$\varepsilon = \pi - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad \text{und} \quad \phi = \pi - \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) \tag{1}$$

Damit wird wegen der Winkelsumme π im beliebigen Viereck:

$$\varepsilon + \phi = \pi - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + \pi - \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) = \pi \tag{2}$$

Dies war zu zeigen.

Analog laufen alle folgenden Nachweise der Sehnenviereckeigenschaft.

Die äußeren Winkelhalbierenden des allgemeinen Vierecks bilden ebenfalls ein Sehnenviereck (Abb. 3). Beweis mit der Winkeleigenschaft.

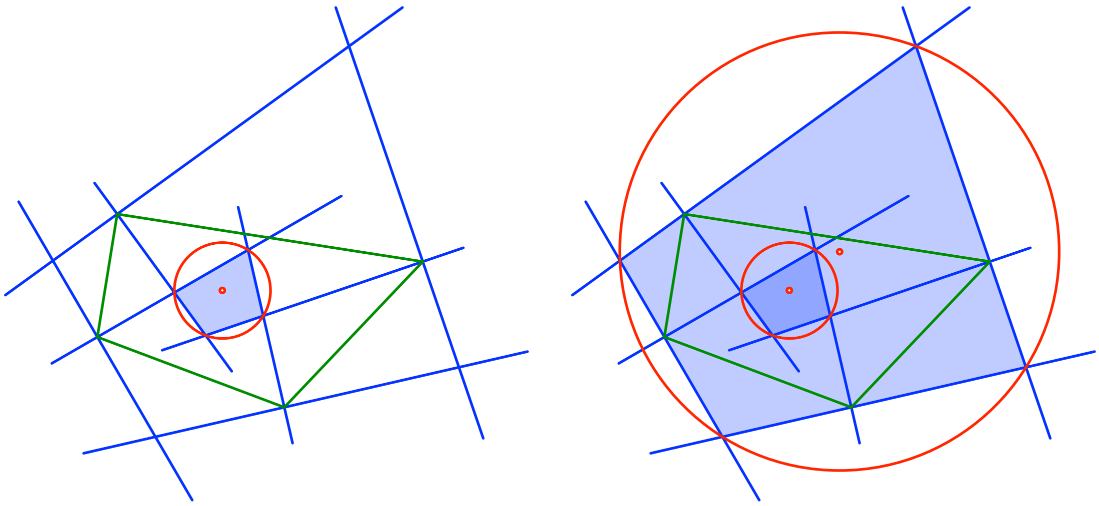

Abb. 3: Äußere Winkelhalbierende

3 Verdrehung der Winkelhalbierenden

3.1 Gleiche Drehwinkel

Wir drehen die inneren Winkelhalbierenden des beliebigen Vierecks um die Eckpunkte um je denselben, aber beliebigen Winkel. In der Abbildung 4 ist der Drehwinkel 20° im Uhrzeigersinn gewählt worden. Die verdrehten Winkelhalbierenden bilden wiederum ein Sehnenviereck. Beweis mit der Winkeleigenschaft.

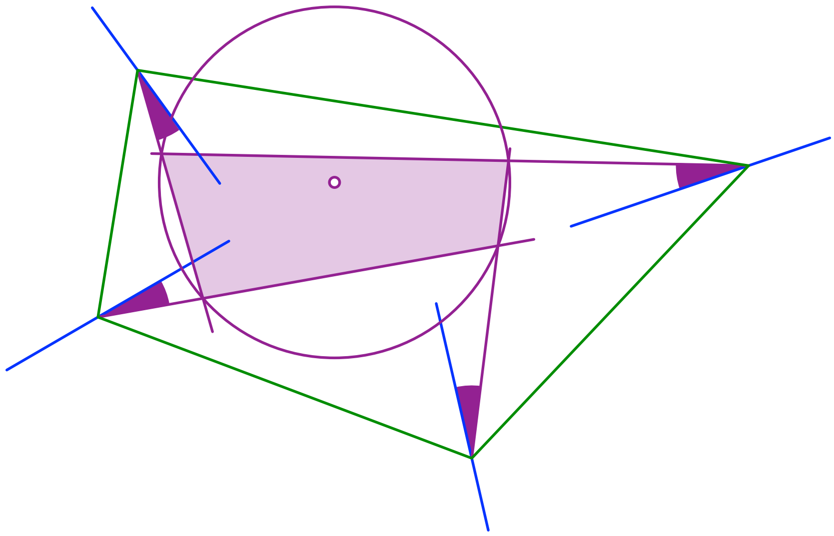

Abb. 4: Verdrehte Winkelhalbierende

3.2 Thaleskreis

Der Mittelpunkt des Umkreises des neuen Sehnenviereckes liegt auf dem Thaleskreis über den Mittelpunkten der Umkreise der beiden durch die inneren und äußeren Winkelhalbierenden generierten Sehnenvierecke (Abb. 5). Dieser Sachverhalt ist allerdings nur mit DGS verifiziert worden. Der Autor hat keinen Beweis und freut sich über jeden Hinweis dazu.

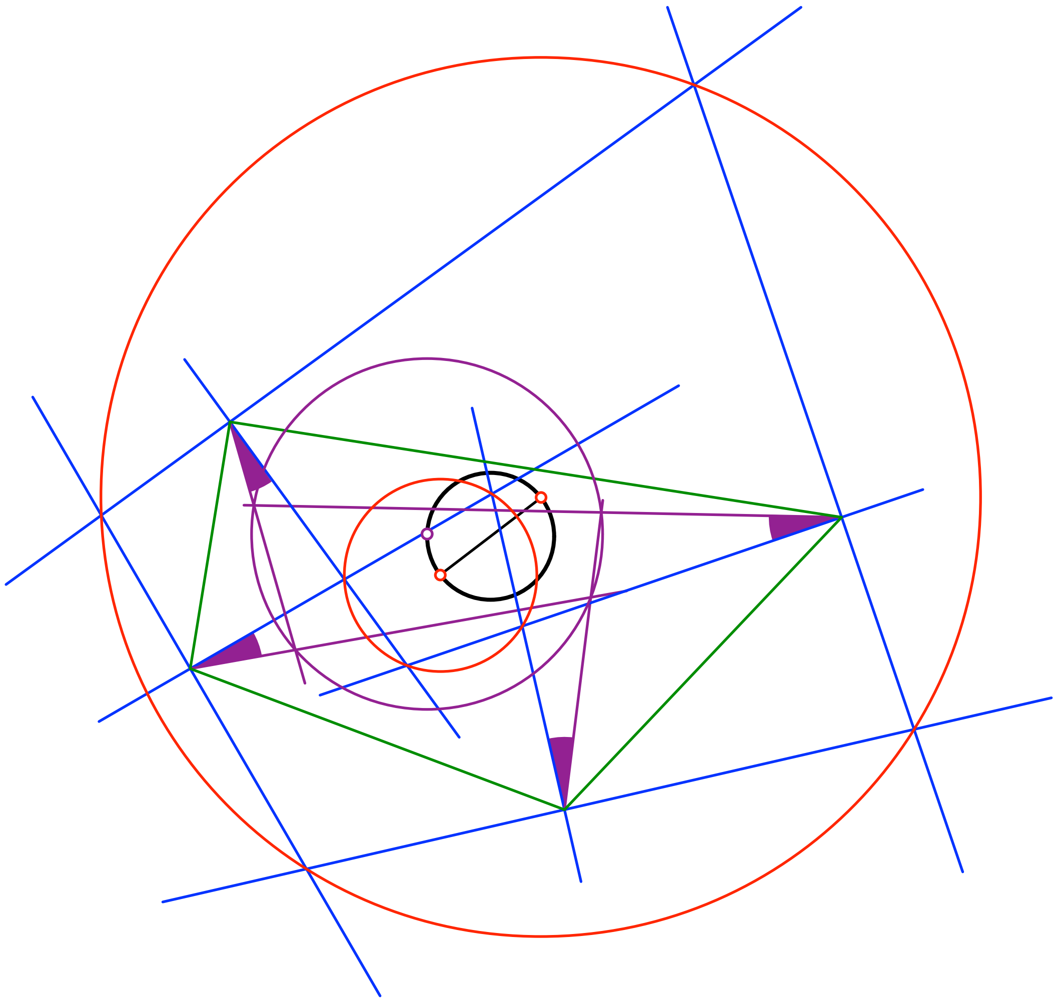

Abb. 5: Thaleskreis

3.3 Individuelles Verdrehen

Wir wählen vier Drehwinkel, deren alternierende Summe verschwindet. In der Abbildung 6 sind die Winkel 40°, 34°, 20°, 26° gewählt worden.

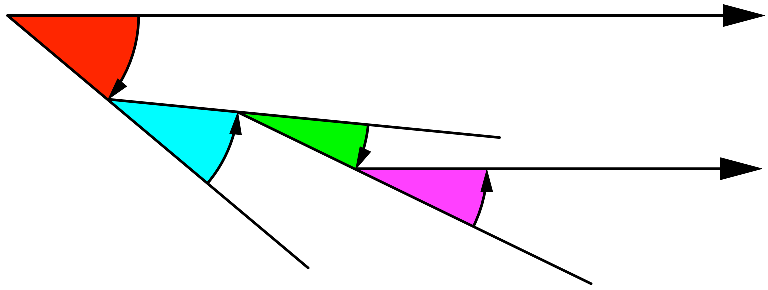

Abb. 6: Alternierende Winkelsumme null

Nun verdrehen wir die Winkelhalbierenden des beliebigen Viereckes der Reihe nach um diese Winkel (Drehsinn beachten) (Abb. 7).

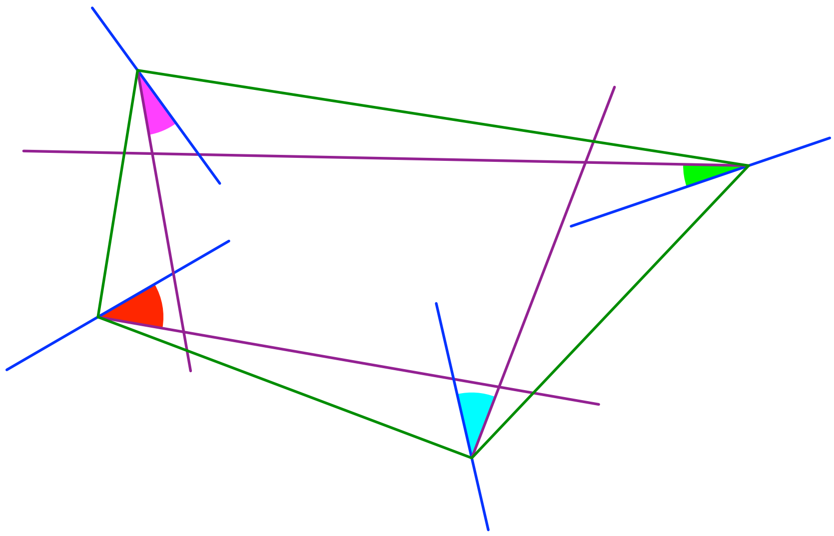

Abb. 7: Individuelle Verdrehungen

Die verdrehten Winkelhalbierenden bilden ein Sehnenviereck (Abb. 8). Beweis mit der Winkeleigenschaft.

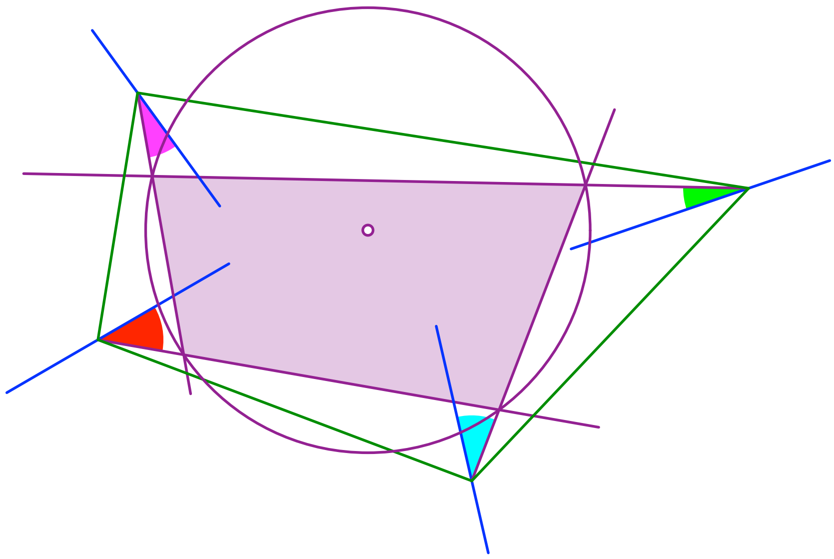

Abb. 8: Sehnenviereck

3.4 Die geklauten Winkel

Die alternierende Summe der Innenwinkel eines Sehnenviereckes ist null. Wir können daher die Innenwinkel eines beliebigen Sehnenviereckes, allenfalls multipliziert mit einer beliebigen Zahl, für das individuelle Verdrehen der Winkelhalbierenden verwenden.

Websites

[1] Hans Walser: Sehnenviereck (11. 4. 2017)

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Sehnenviereck/Sehnenviereck.htm