Hans Walser, [20080303a], [20131216b]

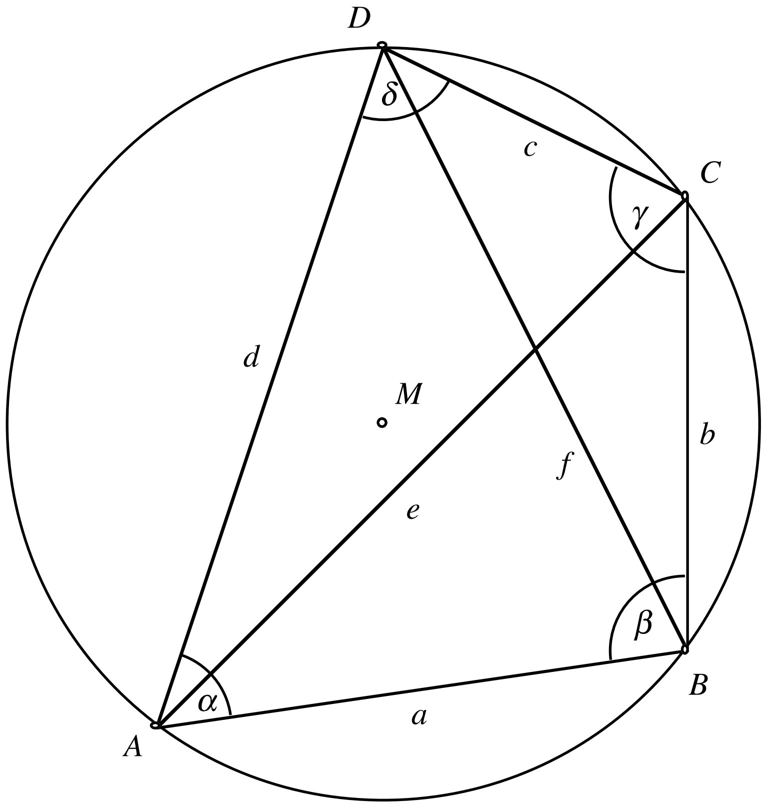
Sehnenviereck

1 Motivation

Diese Studie wurde angeregt durch die Frage, wie sich ein Sehnenviereck aus den vier Seiten konstruieren lässt.

2 Disposition

Sehnenviereck gemäß Figur.



Sehnenviereck

3 Winkelbeziehungen

Aus Peripheriewinkelsätzen folgt

$$\alpha + \gamma = \pi$$
$$\beta + \delta = \pi$$

4 Vier Seiten gegeben

Wie lässt sich ein Sehnenviereck aus seinen vier Seiten a, b, c, d bestimmen?
Es genügt, wenn wir noch einen Winkel kennen.

4.1 Berechnung der Winkel

Der Kosinussatz im Dreieck ABC liefert:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta)$$

Der Kosinussatz im Dreieck *CDA* liefert:

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\delta)$$

Wegen $\beta + \delta = \pi$ ist $\cos(\delta) = -\cos(\beta)$ und daher $e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos(\beta)$. Durch Gleichsetzen erhalten wir:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta) = c^2 + d^2 + 2cd\cos(\beta)$$

$$\cos(\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

Damit lässt sich der Winkel β konstruieren, sofern $a^2 + b^2 \geq c^2 + d^2$; dies kann durch allfälliges Umbezeichnen der Daten erreicht werden.
Durch zyklische Vertauschung ergibt sich die Formelgruppe:

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2(ad+bc)}$$

$$\cos(\beta) = \frac{b^2-c^2-d^2+a^2}{2(ba+cd)}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{c^2-d^2-a^2+b^2}{2(cb+da)}$$

$$\cos(\delta) = \frac{d^2-a^2-b^2+c^2}{2(dc+ab)}$$

4.2 Berechnung der Diagonalen

Einsetzen von $\cos(\beta) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ in $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta)$ liefert:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}$$

Somit ist:

$$e = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$$

Analog:

$$f = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

Auch diese Diagonalen lassen sich konstruieren.

5 Satz von Ptolemäus

Wir multiplizieren die beiden Diagonalen:

$$ef = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}\,\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} = ac + bd$$

Das ist der Satz des Ptolemäus:

$$ef = ac + bd$$

Sonderfall: In einem Rechteck ist $a = c$, $b = d$, $e = f$ und daher:

$$e^2 = a^2 + b^2$$

Der Satz von Ptolemäus enthält also den Satz des Pythagoras.

6 Berechnung des Flächeninhaltes

Wir berechnen die Flächeninhalte der Dreiecke *ABC* und *CDA* separat nach der Formel „Seite mal Seite mal Sinus des Zwischenwinkels durch 2".

Aus $\cos(\beta)=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ ergibt sich $\sin(\beta)=\frac{\sqrt{4(ab+cd)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}}{2(ab+cd)}$. Wegen $\beta+\delta=\pi$ ist $\sin(\delta)=\sin(\beta)$. Damit erhalten wir für den Flächeninhalt des Sehnenvierecks:

$$A_{\text{Sehnenviereck}}=\tfrac{1}{2}\sin(\beta)(ab+cd)=\tfrac{1}{4}\sqrt{4(ab+cd)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2}$$

Der Radikand ist scheinbar nicht symmetrisch in *a, b, c, d*; durch Expandieren erhalten wir aber:

$$\begin{aligned}&4(ab+cd)^2-\left(a^2+b^2-c^2-d^2\right)^2\\&=-a^4-b^4-c^4-d^4+2\left(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right)+8abcd\end{aligned}$$

Mit $s=\frac{a+b+c+d}{2}$ kann dieser Term umgeschrieben werden zu:

$$\begin{aligned}&-a^4-b^4-c^4-d^4+2\left(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right)+8abcd\\&=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$A_{\text{Sehnenviereck}}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Dies ist die Formel von Brahmagupta (598-668). Als Sonderfall erhalten wir daraus die Heronsche Formel: Jedes Dreieck kann als Sehnenviereck mit $d=0$ gesehen werden. Damit ist:

$$A_{\text{Dreieck}}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

7 Vier kozyklische Punkte

Wie kann geprüft werden, ob vier durch Koordinaten gegebene Punkte auf einem Kreis liegen, also die Ecken eines Sehnenviereckes sind?

7.1 Zyklische Reihenfolge

Wir nehmen an, die vier Punkte *A, B, C, D* liegen in zyklischer Reihenfolge auf dem Kreis. Wir interpretieren die vier Punkte als komplexe Zahlen und bilden die komplexen Seiten:

$$a=B-A \qquad b=C-B \qquad c=D-C \qquad d=D-A$$

Dann ist:

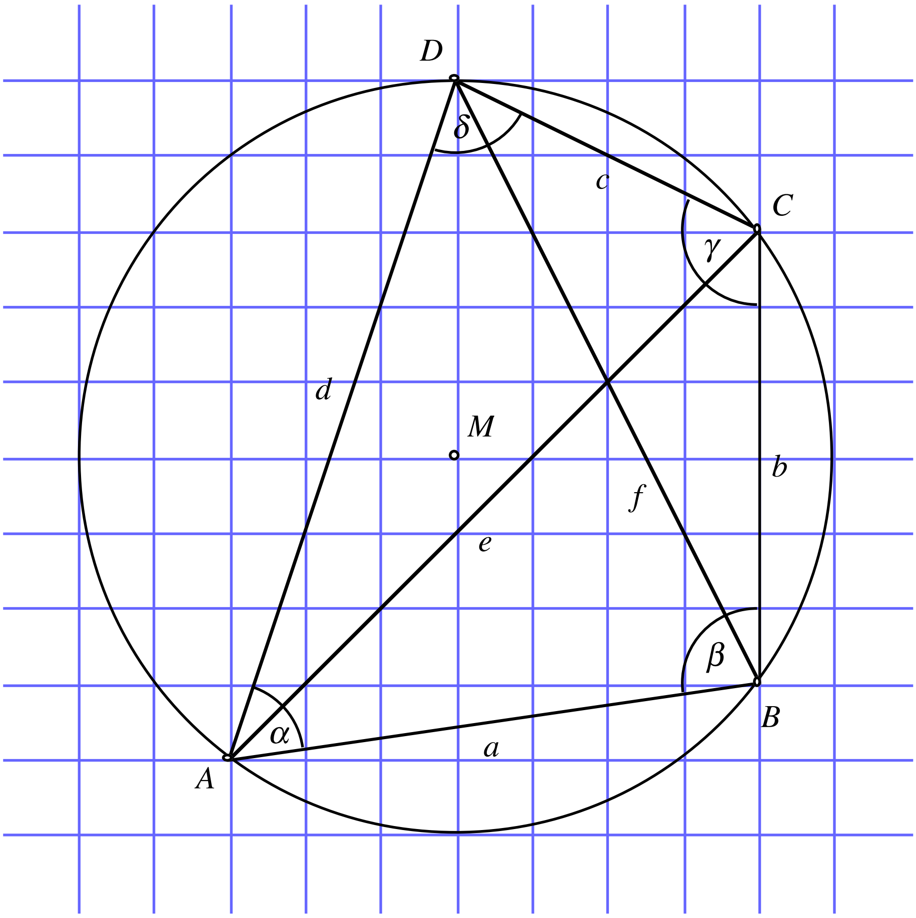
$$\frac{b}{a}=\frac{|b|}{|a|}e^{i(\pi-\beta)} \qquad \frac{d}{c}=\frac{|d|}{|c|}e^{i(\pi-\delta)}$$

Damit wird:

$$\frac{b}{a}\,\frac{d}{c}=\frac{|b|}{|a|}\,\frac{|d|}{|c|}\,e^{i\left((\pi-\beta)+(\pi-\delta)\right)}=\frac{|b|}{|a|}\,\frac{|d|}{|c|}\,e^{i\pi}=-\frac{|b|}{|a|}\,\frac{|d|}{|c|}$$

Das Produkt ist also reell und negativ.

Beispiel: $A=-3-4i$, $B=4-3i$, $C=4+3i$, $D=5i$



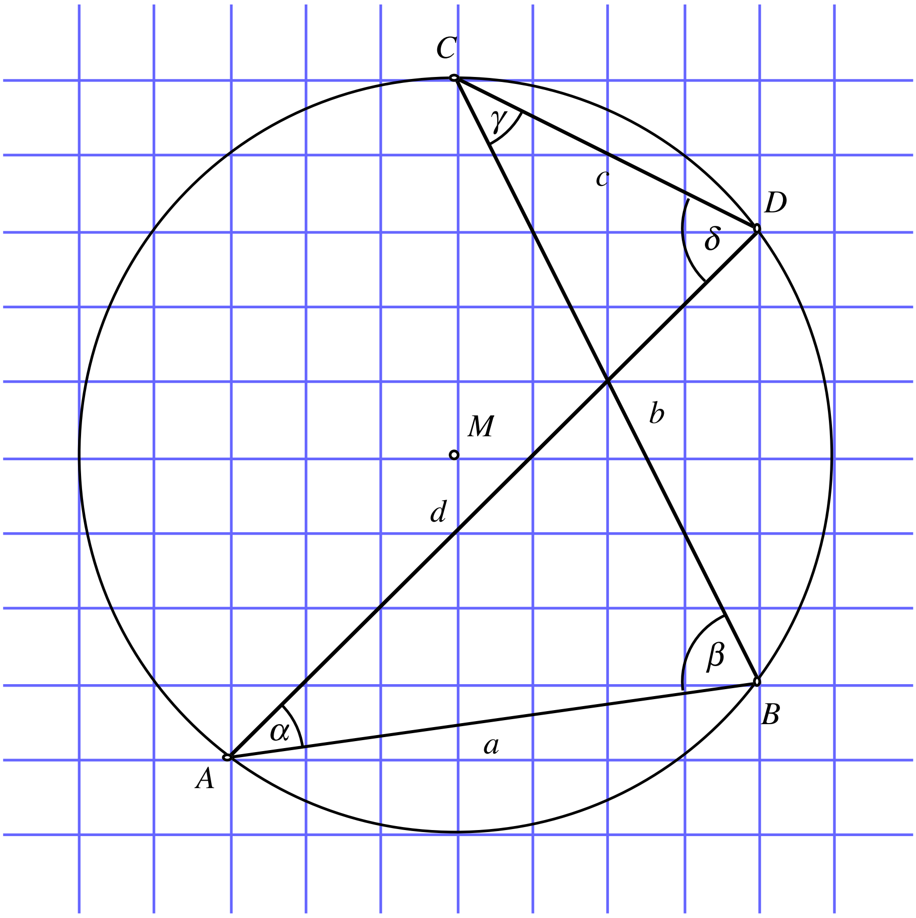
Beispiel

Wir erhalten: $a=7+i$, $b=6i$, $c=-4+2i$, $d=-3-9i$ und weiter:

$$\frac{b}{a}\,\frac{d}{c}=\frac{6i}{7+i}\,\frac{-3-9i}{-4+2i}=-\frac{9}{5}$$

7.2 Nicht zyklische Reihenfolge

Beispiel: Es sei B zwischen A und D und C zwischen D und A.



„Überschlagenes Sehnenviereck"

Aus Peripheriewinkelsätzen folgt $\pi - \delta = -(\pi - \beta)$. Damit erhalten wir:

$$\frac{b}{a}\frac{d}{c} = \frac{|b|}{|a|}\frac{|d|}{|c|}e^{i((\pi-\beta)+(\pi-\delta))} = \frac{|b|}{|a|}\frac{|d|}{|c|}e^{i((\pi-\beta)-(\pi-\beta))} = \frac{|b|}{|a|}\frac{|d|}{|c|}e^{0} = \frac{|b|}{|a|}\frac{|d|}{|c|}$$

Das Produkt ist reell und positiv.

Beispiel: $A = -3 - 4i$, $B = 4 - 3i$, $C = 5i$, $D = 4 + 3i$. Damit wird: $a = 7 + i$, $b = -4 + 8i$, $c = 4 - 2i$, $d = -7 - 7i$ und weiter:

$$\frac{b}{a}\frac{d}{c} = \frac{-4+8i}{7+i}\frac{-7-7i}{4-2i} = \frac{14}{5}$$

Wenn umgekehrt D nicht auf dem Umkreis des Dreieckes ABC liegt, stimmen obige Relationen nicht.

Vier Punkte A, B, C, D sind genau dann kozyklisch, wenn $\frac{b}{a}\frac{d}{c} \in \mathbb{R}$. Als Sonderfall können die vier Punkte auf einer Geraden liegen.