Hans Walser, [20150130]

Sehnenviereck und Tangentenviereck

1 Worum geht es?

Es werden Zusammenhänge zwischen Sehnenviereck und Tangentenviereck untersucht.

2 Gewusst wie

Gewusst wie ist besser als verstanden warum.

2.1 Vom Tangentenviereck zum Sehnenviereck

Zu einem Tangentenviereck zeichnen wir die äußeren Winkelhalbierenden. Diese bilden ein Sehnenviereck (Abb. 1).

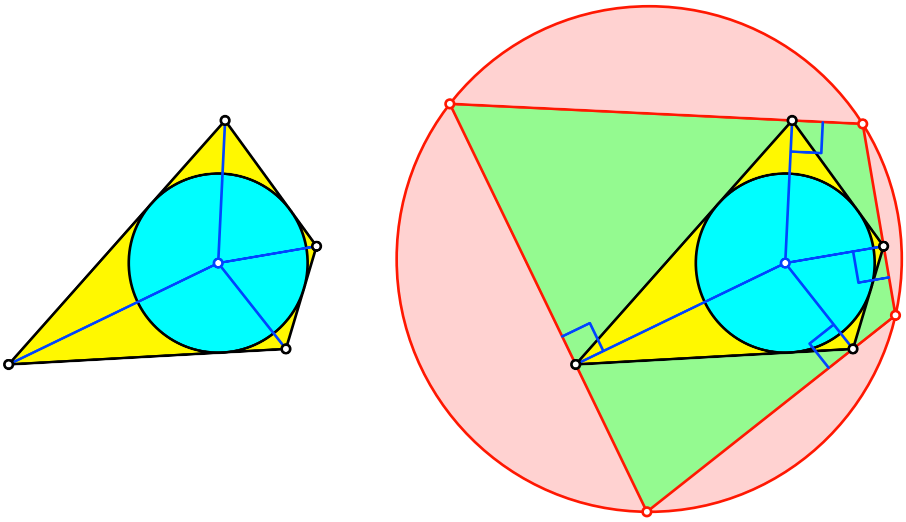

Abb. 1: Vom Tangentenviereck zum Sehnenviereck

2.2 Vom Sehnenviereck zum Tangentenviereck

Vom Diagonalenschnittpunkt eines Sehnenviereckes fällen wir die Lote auf die Seiten. Die Lotfußpunkte bilden ein Tangentenviereck (Abb. 2).

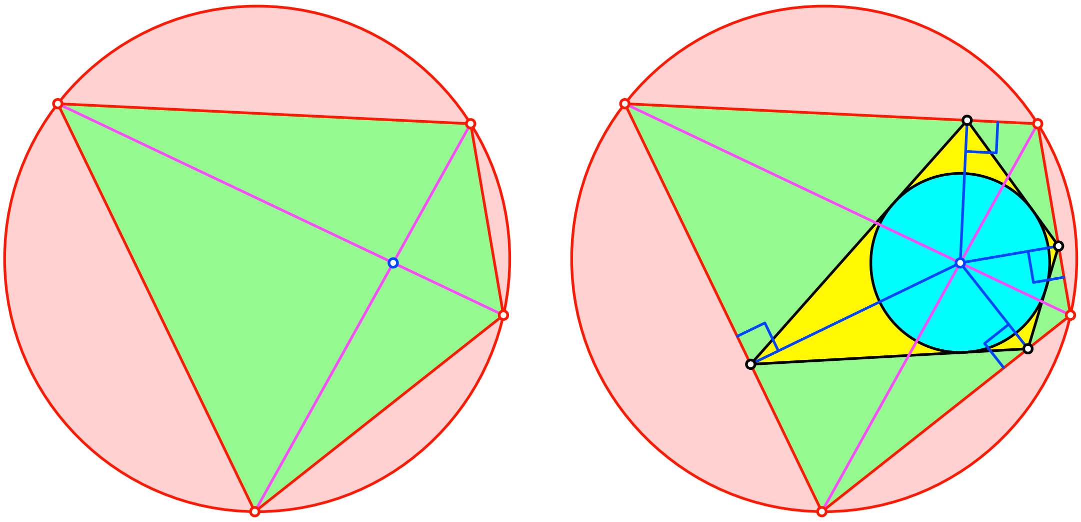

Abb. 2: Vom Sehnenviereck zum Tangentenviereck

3 Verstanden warum

3.1 Vom Tangentenviereck zum Sehnenviereck

Im Tangentenviereck *ABCD* führen wir zusätzlich die Winkel $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\gamma}$ gemäß Abbildung 3 ein.

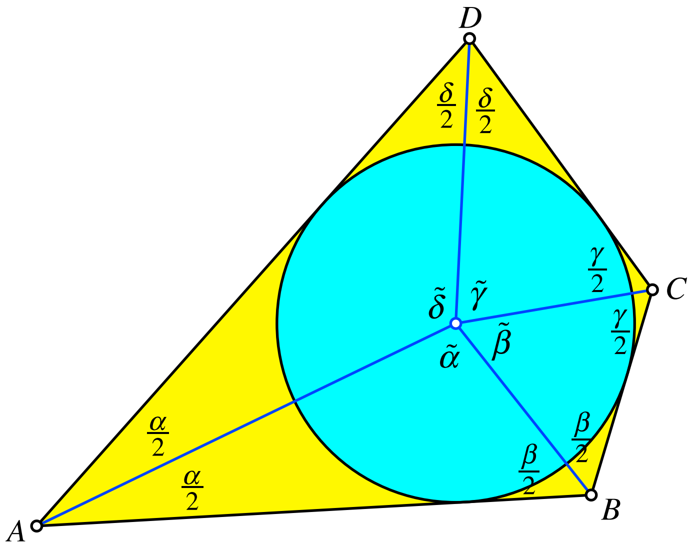

Abb. 3: Bezeichnungen

Es ist dann:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\pi-\tilde{\alpha}$$

$$\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}=\pi-\tilde{\gamma}$$

Wegen der Winkelsumme im Viereck ist weiter:

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}=\pi$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der Summe der beiden oberen Gleichungen ergibt sich:

$$0=\pi-\tilde{\alpha}+\pi-\tilde{\gamma}-\pi$$

$$\tilde{\alpha}+\tilde{\gamma}=\pi$$

Die beiden Winkel $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\gamma}$ verhalten sich also wie gegenüberliegende Winkel eines Sehnenviereckes. Daraus folgt die Stimmigkeit der Konstruktion gemäß Abbildung 1.

Verallgemeinerung: Wir können die vier äußeren Winkelhalbierenden gemäß Abbildung 1 je um den gleichen Winkel um die Ecken des Tangentenviereckes verdrehen und erhalten immer noch ein Sehnenviereck (Abb. 4).

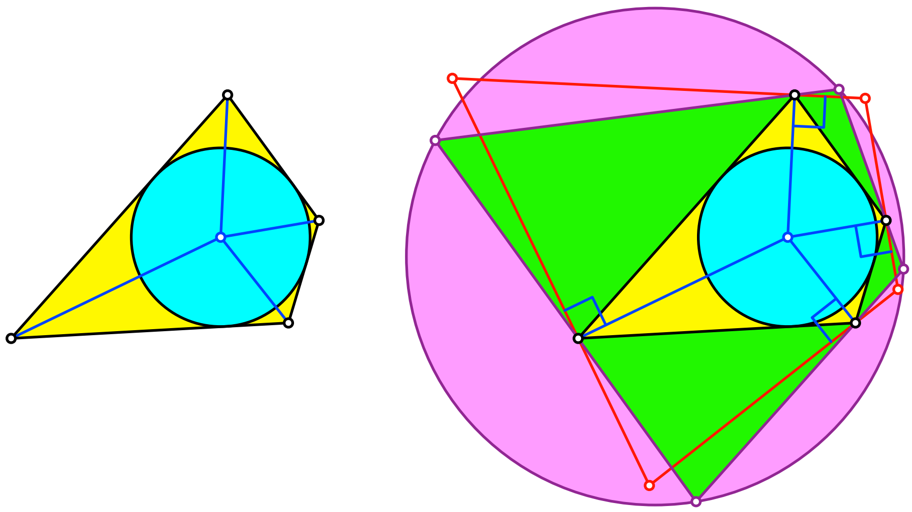

Abb. 4: Weitere Lösung

Wir haben also eine einparametrige Schar von Lösungen.

3.2 Vom Sehnenviereck zum Tangentenviereck

Wir zeichnen zum Tangentenviereck die vier Ankreise gemäß Abbildung 5.

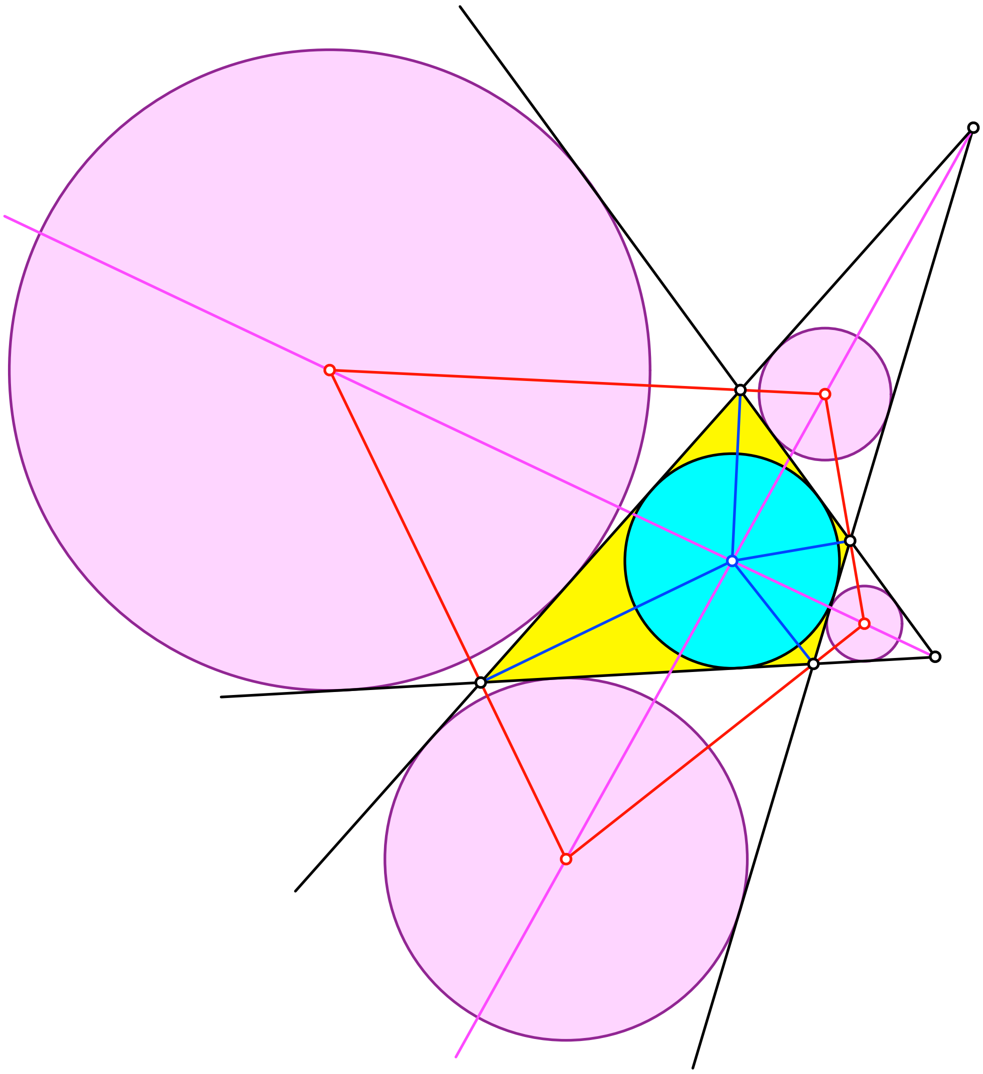

Abb. 5: Ankreise an das Tangentenviereck

Die Zentren dieser Ankreise sind die vier Ecken des Sehnenviereckes gemäß der Konstruktion der Abbildung 1. Die Diagonalen dieses Sehnenviereckes sind nun aber Winkelhalbierende gegenüberliegender Seiten des Tangentenvierecks. Insbesondere ist ihr Schnittpunkt das Zentrum des Inkreises des Tangentenviereckes. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Sehnenviereckes ist der Mittelpunkt des Inkreises des Tangentenviereckes. Daraus folgt die Stimmigkeit der Konstruktion der Abbildung 2.

Wie wir in der Abbildung 4 gesehen haben, ergeben sich weitere Lösungen durch Verdrehen. Bei diesem Verdrehen bewegen sich die Eckpunkte des Sehnenviereckes auf Ortsbogen, welche durch den Inkreismittelpunkt und die Eckpunkte des Tangentenviereckes gegeben sind (Abb. 6). Dabei verdrehen sich die Diagonalen des Sehnenviereckes um denselben Winkel und gehen immer noch durch den Inkreismittelpunkt des Tangentenviereckes.

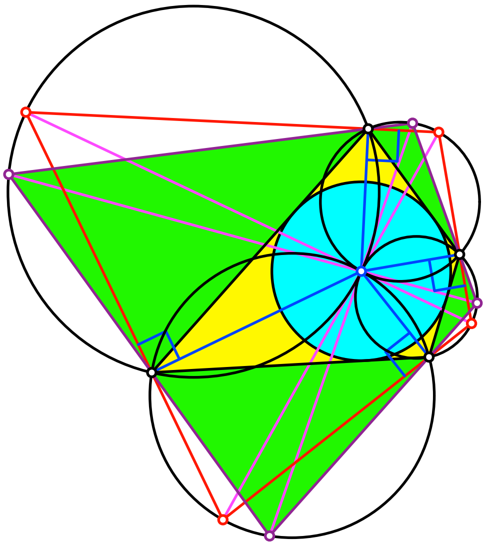

Abb. 6: Verdrehen mit Ortsbogen

Damit ergibt sich eine Erweiterung der in der Abbildung 2 angegebenen Konstruktion des Tangentenviereckes auf der Basis des Sehnenviereckes: Zunächst zeichnen wir wieder den Diagonalenschnittpunkt des Sehnenviereckes. Statt der Lote fällen wir nun „schräge Lote“, also Linien, welche gegenüber den Loten alle um den gleichen Winkel im gleichen Drehsinn verdreht sind. Die Fußpunkt dieser Linien definieren ein Tangentenviereck (Abb. 7). Wir haben also auch hier eine einparametrige Schar von Lösungen.

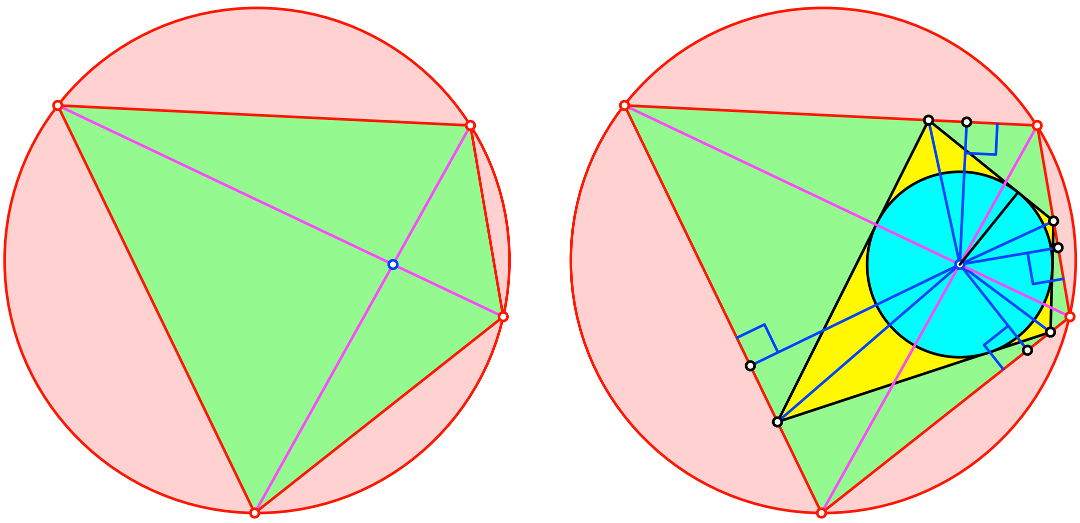

Abb. 7: Weitere Lösung