Hans Walser, [20161231]

Schwerpunkte im semiregulären Fünfeck

1 Worum geht es?

Das semireguläre Fünfeck entsteht durch Wegnahme eines Rhombus vom regulären Fünfeck gemäß Abbildung 1. Das semireguläre Fünfeck ist gleichseitig, aber nicht gleichwinklig.

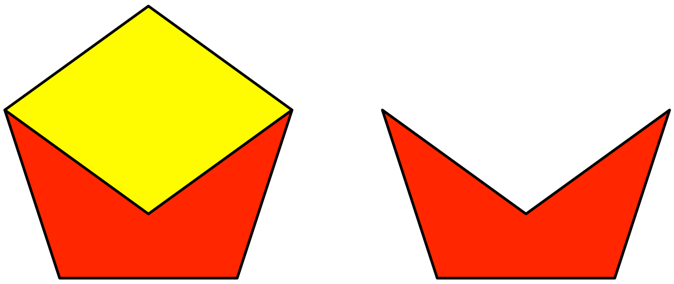

Abb. 1: Reguläres und semireguläres Fünfeck

Wir bestimmen Eckenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt im semiregulären Fünfeck.

2 Gleichseitige Vielecke

In gleichseitigen Vielecken stimmen Eckenschwerpunkt und Kantenschwerpunkt überein.

Beweis: Im n-Eck $A_1 ... A_n$ erhalten wir den Eckenschwerpunkt E durch:

$$E = \tfrac{1}{n}\left(A_1 + \cdots + A_n\right) \tag{1}$$

Da alle Seiten gleich lang sind, also dasselbe „Gewicht“ haben, ergibt sich der Kantenschwerpunkt K als Eckenschwerpunkt der Kantenmitten $M_1, \ldots, M_n$, also:

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{n}\left(M_1 + \cdots + M_n\right) = \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{1}{2}\left(A_1 + A_2\right) + \tfrac{1}{2}\left(A_2 + A_3\right) + \cdots + \tfrac{1}{2}\left(A_n + A_1\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{n}\left(A_1 + \cdots + A_n\right) = E \end{aligned} \tag{2}$$

Da das semireguläre Fünfeck gleichseitig ist, stimmen Eckenschwerpunkt und Kantenschwerpunkt überein.

3 Ecken- und Kantenschwerpunkt

Die Abbildung 2 zeigt die Konstruktion des Eckenschwerpunktes E. Das ist dann auch der Kantenschwerpunkt.

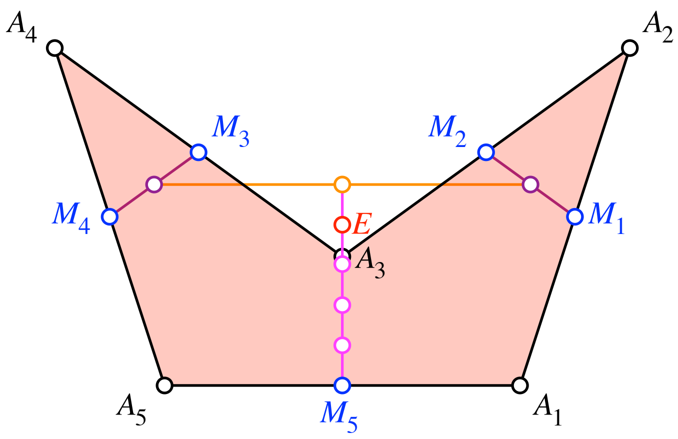

Abb. 2: Ecken- und Kantenschwerpunkt

4 Flächenschwerpunkt

Der Flächenschwerpunkt ist überraschenderweise der Eckpunkt A_3 (Abb. 3).

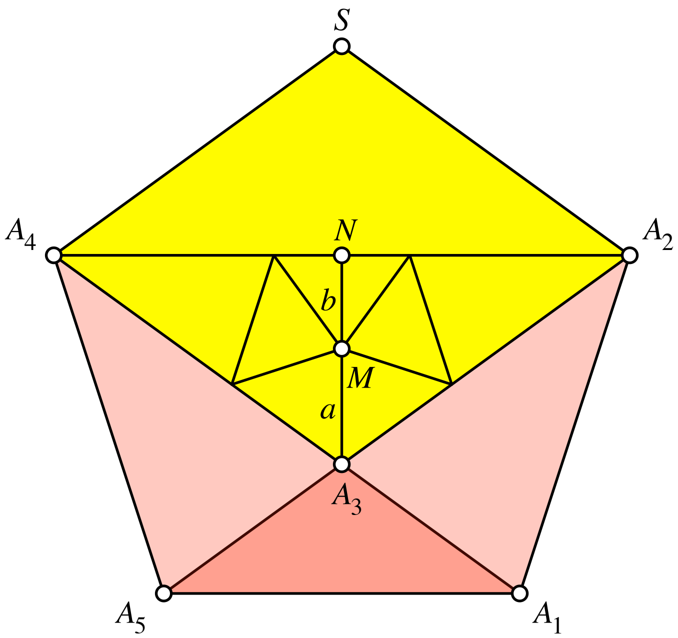

Abb. 3: Flächenschwerpunkt

Das können wir wie folgt einsehen.

Das reguläre Fünfeck $A_1A_2SA_4A_5$ hat den Mittelpunkt M als Flächenschwerpunkt.

Der abzuschneidende Rhombus $SA_4A_3A_2$ hat den Mittelpunkt N als Flächenschwerpunkt. Der Rhombus besteht aus den beiden kongruenten Dreiecken $A_3A_2A_4$ und SA_4A_2. Diesen beiden Dreiecken ordnen wir je den Flächeninhalt 1 zu. Der Rhombus hat also den Flächeninhalt 2.

Das semireguläre Fünfeck $A_1...A_5$ besteht aus zwei sich überlappenden Dreiecken $A_1A_2A_5$ und $A_5A_1A_4$. Diese beiden Dreiecke sind kongruent zu den beiden Dreiecken, aus denen sich der Rhombus zusammensetzt. Sie haben also ebenfalls je den Flächeninhalt 1. Wegen (Teilung im Goldenen Schnitt)

$$\overline{A_1A_3} : \overline{A_1A_4} = \left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2 : 1 \tag{3}$$

hat das Überlappungsdreieck $A_3A_5A_1$ den Flächeninhalt $\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2$. Somit hat das semireguläre Fünfeck $A_1...A_5$ den Flächeninhalt:

$$2 - \left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2 = \Phi \tag{4}$$

Dabei ist $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (Walser 2013, S. 16).

Wir haben also:

$$\text{gelb} : \text{rot} = 2 : \Phi \tag{5}$$

Im Zentrum der Abbildung 3 sehen wir ein kleines reguläres Fünfeck. Für die eingezeichneten Strecken a und b gilt:

$$a : b = 1 : \cos(36°) \tag{6}$$

Nun ist aber (Walser 2013, S. 77):

$$\cos(36°) = \tfrac{\Phi}{2} \tag{7}$$

Aus (5), (6) und (7) folgt:

$$\text{gelb} : \text{rot} = a : b \tag{8}$$

Nach den Hebelgesetzen von Archimedes ist daher A_3 der Flächenschwerpunkt des semiregulären Fünfeckes $A_1 \ldots A_5$.

Literatur

Walser, Hans (2013): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.