Hans Walser, [20170318]

Schubspiegelungen zusammensetzen

1 Worum geht es?

Die Zusammensetzung zweier Geradenspiegelungen mit nicht parallelen Speigelachsen ist eine Drehung. Der Drehwinkel ist das Doppelte des Winkels von der Achse der ersten Spiegelung zur Achse der zweiten Spiegelung. Das Drehzentrum ist der Schnittpunkt der beiden Spiegelachsen.

Bei der Zusammensetzung von zwei Schubspiegelungen ändern die beiden beteiligten Schubvektoren nichts an der Verdrehung. Die Zusammensetzung zweier Schubspiegelungen mit nicht parallelen Schubspiegelachsen ist also nach wie vor eine Drehung. Der Drehwinkel ist nach wie vor das Doppelte des Winkels von der ersten Schubspiegelachse zur zweiten Schubspiegelachse. Wir fragen nach der Position des Drehzentrums.

Die Abbildung 1 zeigt die Zusammensetzung zweier Schubspiegelungen. Die erste Schubspiegelung hat die Achse b und den Schubvektor $\vec{v}$, die zweite die Achse e und den Schubvektor $\vec{w}$. Das Urbild ist grün gezeichnet, das Zwischenbild nach der ersten Schubspiegelung gelb und das Endbild rot.

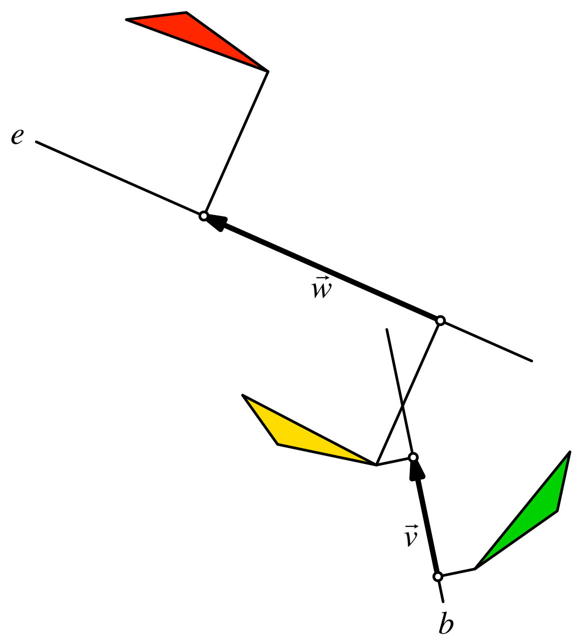

Abb. 1: Zusammensetzung zweier Schubspiegelungen

Wir fragen nach dem Zentrum der Rotation, welche grün in rot überführt.

2 Das Drehzentrum

Wir finden das Drehzentrum Z wie folgt (Abb. 2). Zunächst sei B der Schnittpunkt der beiden Schubspiegelachsen b und e. Wir verschieben die beiden Schubvektoren so, dass B die Spitze von $\vec{v}$ und auch der Anfangspunkt von $\vec{w}$ ist.

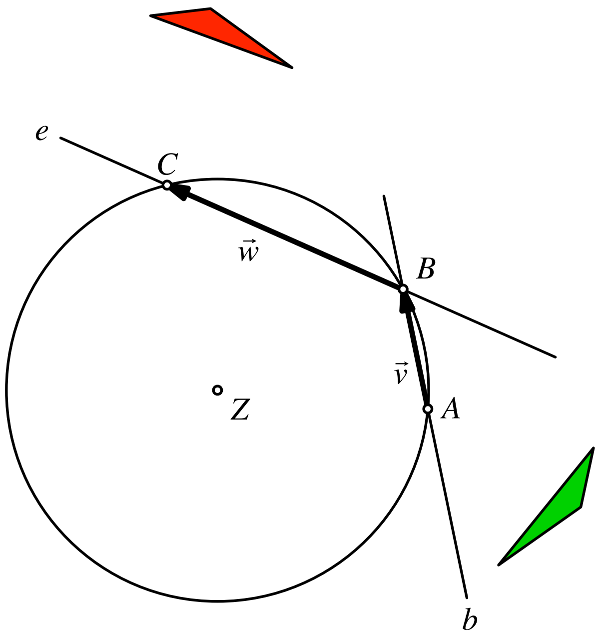

Abb. 2: Konstruktion des Drehzentrums

Die Punkte A und C wählen wir so, dass:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{w} \tag{1}$$

Das Zentrum Z des Kreises durch A, B, C ist das gesuchte Drehzentrum.

3 Beweis

Für den Beweis verwenden wir Spiegelungsgeometrie (Abb. 3). Es sei a die Mittelsenkrechte der Strecke AB, c die Senkrechte zu b durch B, d die Senkrechte zu e durch B und f die Mittelsenkrechte der Strecke BC.

Mit s_a bezeichnen wir die Spiegelung an der Geraden a.

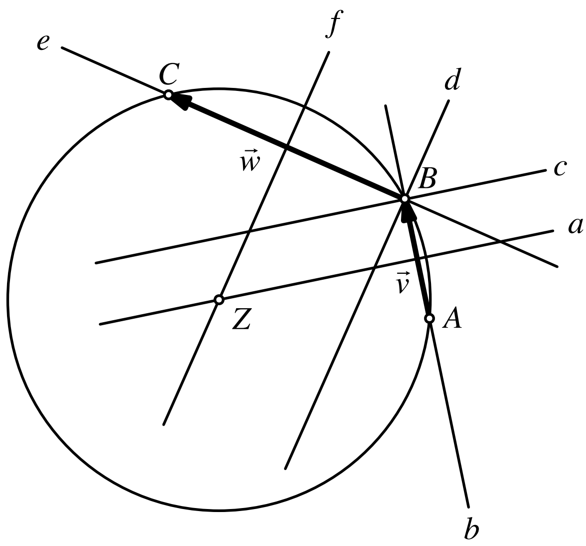

Abb. 3: Beweisfigur

Wir können nun die beiden Schubspielelungen als Zusammensetzung von je drei Geradenspiegelungen darstellen.

Die erste Schubspiegelung ist $s_c \circ s_b \circ s_a$ (Schreibweise von rechts nach links), die zweite Schubspiegelung $s_f \circ s_e \circ s_d$.

Für die Zusammensetzung der beiden Schubspiegelungen gilt also:

$$s_f \circ s_e \circ s_d \circ s_c \circ s_b \circ s_a \tag{2}$$

Die Zusammensetzung $s_c \circ s_b$ der beiden letzten Spiegelungen der ersten Schubspiegelung und der beiden ersten Spiegelungen $s_d \circ s_e$ der zweiten Schubspiegelung sind je die Punktspiegelung an B:

$$s_c \circ s_b = s_d \circ s_e = s_B \tag{3}$$

Somit erhalten wir für die Zusammensetzung (2) der beiden Schubspiegelungen:

$$s_f \circ \underbrace{s_e \circ s_d}_{s_B} \circ \underbrace{s_c \circ s_b}_{s_B} \circ s_a \tag{4}$$

Die Zusammensetzung der Punktspiegelung an B mit sich selber ist die identische Abbildung. Somit erhalten wir:

$$s_f \circ \underbrace{\underbrace{s_e \circ s_d}_{s_B} \circ \underbrace{s_c \circ s_b}_{s_B}}_{\substack{\text{identische} \\ \text{Abbildung}}} \circ s_a = s_f \circ s_a \tag{5}$$

Die resultierende Abbildung $s_f \circ s_a$ ist die Drehung um den Schnittpunkt von a mit f um den doppelten Winkel von a nach f. Der Schnittpunkt ist das Zentrum Z des Kreises durch A, B, C. Der Winkel von a nach f ist auch der Winkel von b nach e.
Damit ist die Konstruktion des Drehzentrums validiert.