Hans Walser, [20160913]

Schnittpunkt

Anregung: Manfred Schmelzer, Regensburg

1 Worum geht es?

Mit Hilfe von zwei Geradenbüscheln können Schnittpunkte von drei Geraden gefunden werden.

2 Vorgehen

Wir zeichnen zwei Geradenbüschel von je drei Geraden (Abb. 1).

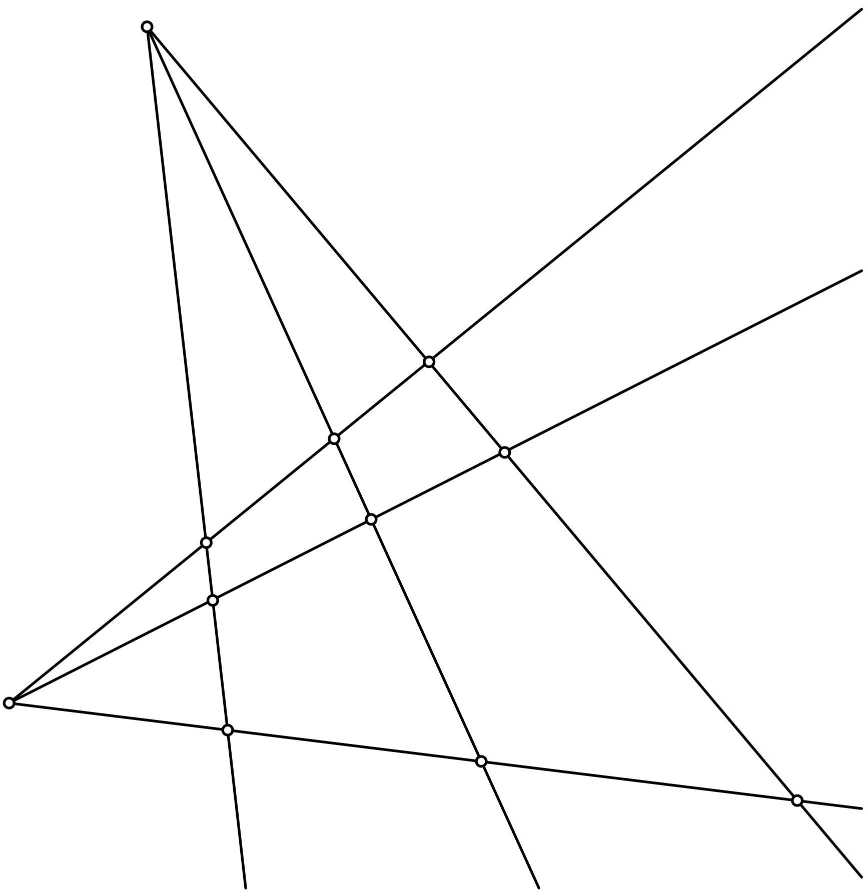

Abb. 1: Zwei Geradenbüschel

Dadurch erhalten wir insgesamt neun Schnittpunkte. Aus diesen neun Punkten wählen wir drei Punkte als Eckpunkte eines Dreiecks aus, aber so, dass keine Dreiecksseite auf eine Büschelgerade fällt. Die Abbildung 2 zeigt ein Beispiel. Es gibt insgesamt 3! = 6 Möglichkeiten für ein solches Dreieck.

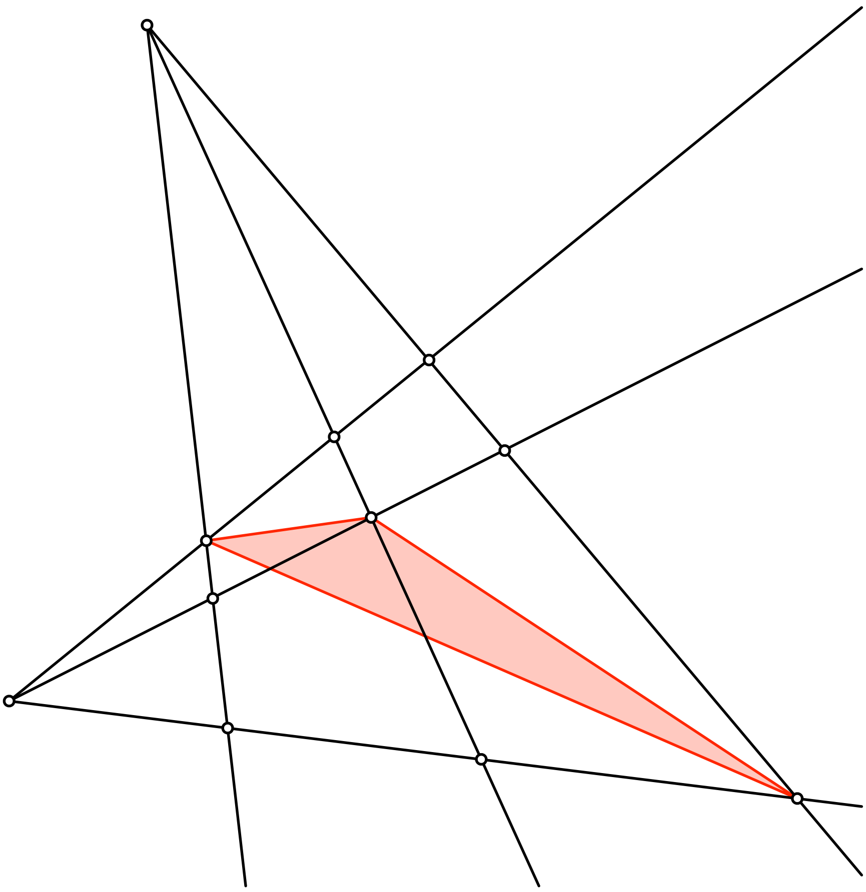

Abb. 2: Auswahl eines Dreiecks

Jede Dreiecksseite ist Diagonale in einem Büschelgeraden-Viereck. Wir zeichnen nun zu jeder Dreiecksseite die jeweils andere Diagonale (Abb. 3). Diese drei Geraden sind kopunktal, das heißt sie schneiden sich in einem Punkt.

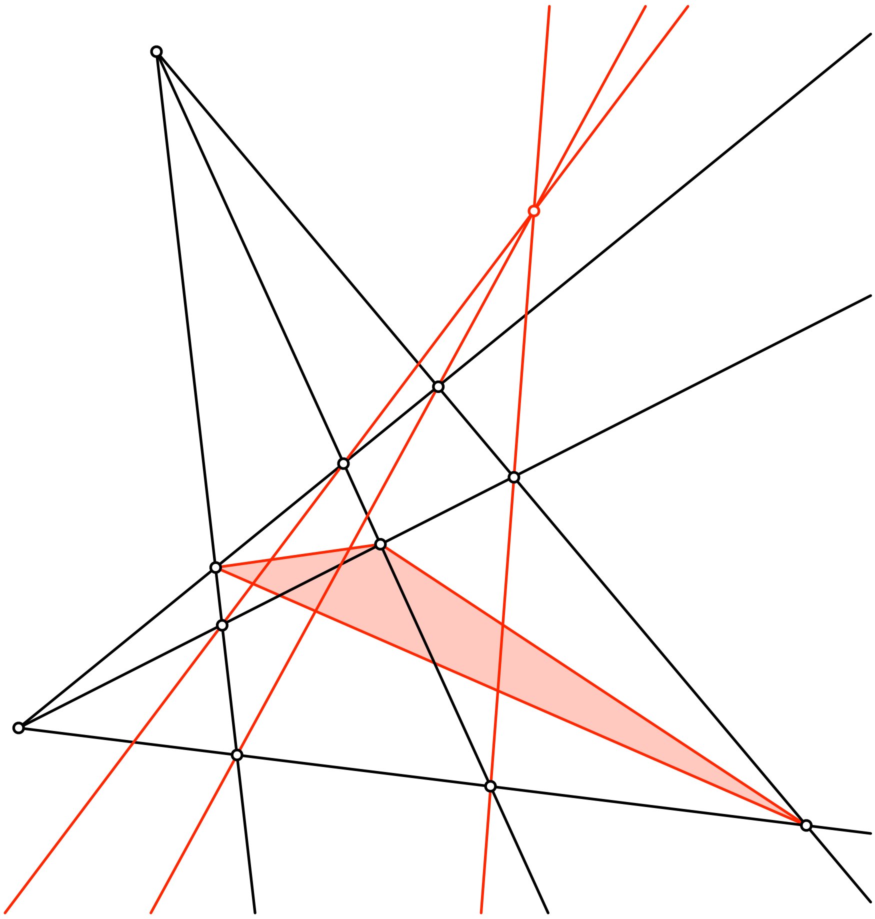

Abb. 3: Schnittpunkt

Beweis folgt.

Die Abbildung 4 zeigt die sechs möglichen Dreiecke.

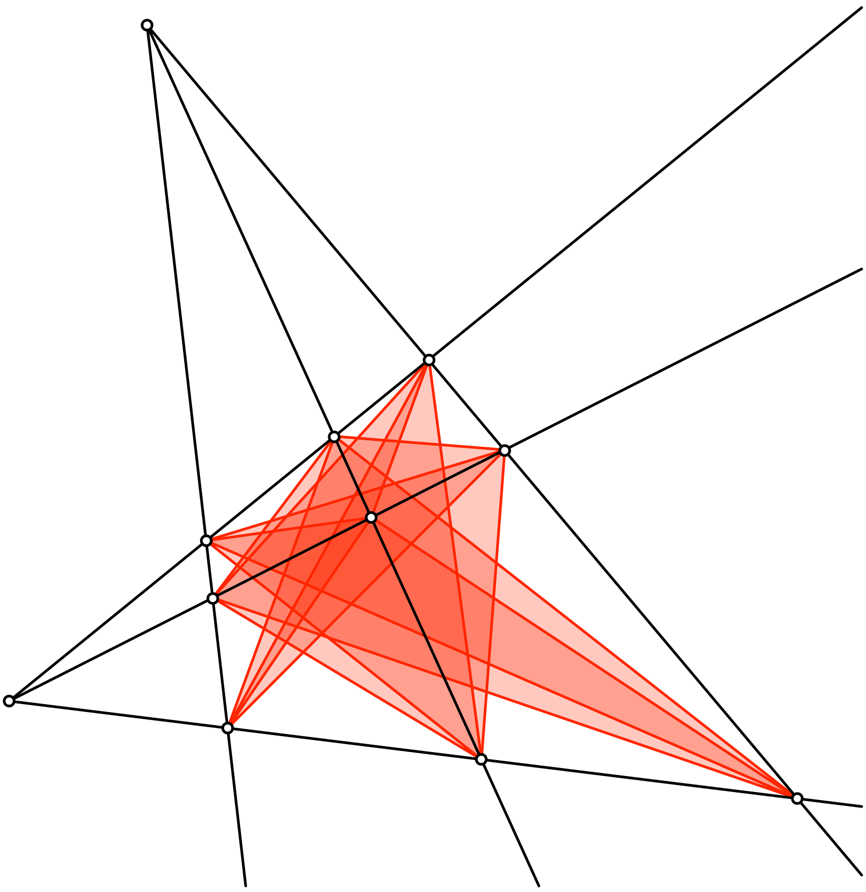

Abb. 4: Die sechs Dreiecke

In der Abbildung 5 sind zusätzliche die jeweils drei Gegendiagonalen und deren Schnittpunkte eingezeichnet.

Die Schnittpunkte liegen zu je dreien auf einer Geraden (ohne Beweis).

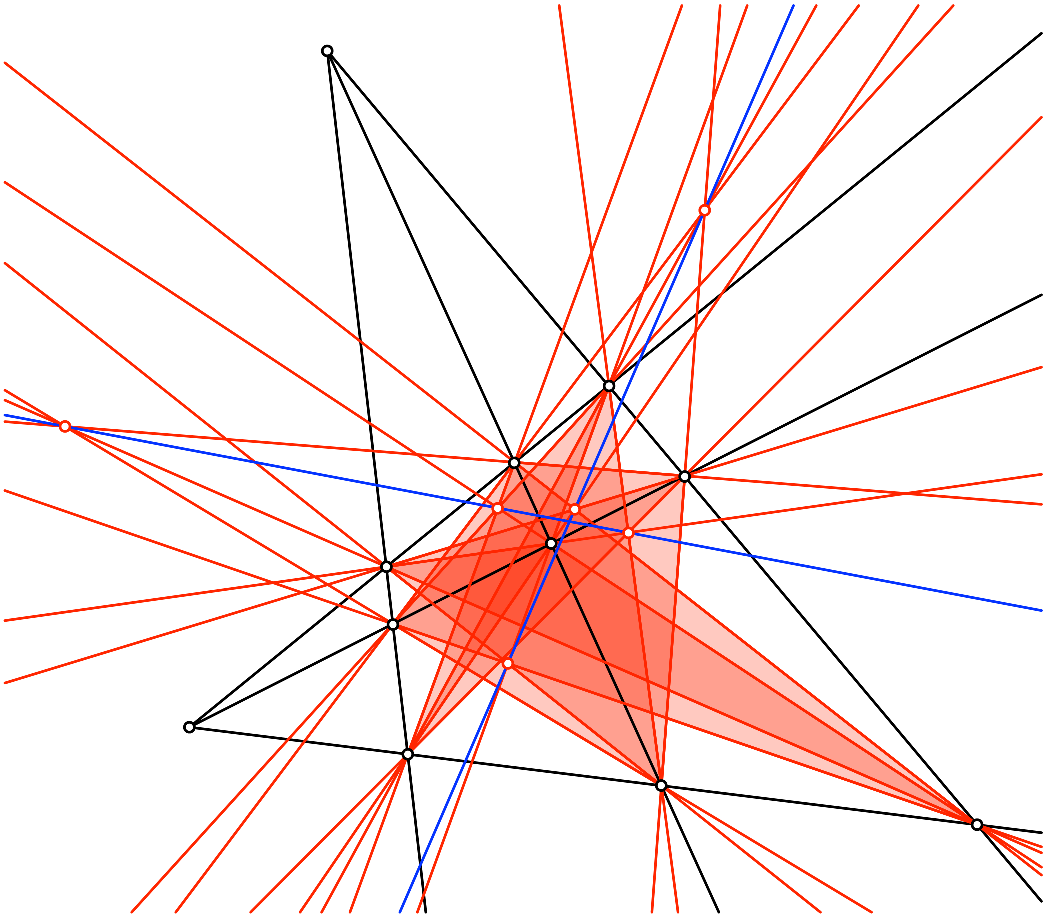

Abb. 5: Die sechs Schnittpunkte

3 Beweis der Schnittpunkteigenschaft

Die Begriffe *Gerade* und *Schnittpunkt* sind projektiv invariant. Wir können daher die Konfiguration der Abbildung 3 durch eine projektive Abbildung so verändern, dass die Geraden des einen Büschels horizontal und die Geraden des anderen Büschels vertikal sind. Die Büschelpunkte werden dabei auf unendliche ferne Punkte abgebildet.

Die Abbildung 6 zeigt die Situation in einem kartesischen Koordinatensystem.

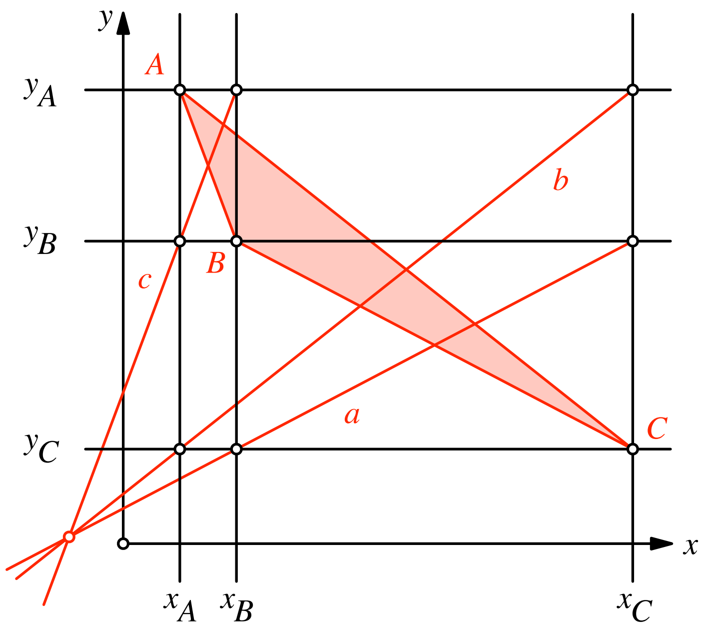

Abb. 6: Im kartesischen Koordinatensystem

Für die Gegendiagonalen *a, b, c* erhalten wir die Geradengleichungen:

$$\begin{aligned} a: &\quad x(y_C - y_B) + y(x_B - x_C) + x_B y_B - x_C y_C = 0 \\ b: &\quad x(y_A - y_C) + y(x_C - x_A) + x_C y_C - x_A y_A = 0 \\ c: &\quad x(y_B - y_A) + y(x_A - x_B) + x_A y_A - x_B y_B = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich die Koeffizientenmatrix *M*:

$$M = \begin{bmatrix} y_C - y_B & x_B - x_C & x_B y_B - x_C y_C \\ y_A - y_C & x_C - x_A & x_C y_C - x_A y_A \\ y_B - y_A & x_A - x_B & x_A y_A - x_B y_B \end{bmatrix} \tag{2}$$

Es ist $\det(M) = 0$. Daher sind die drei Geraden *a, b, c* kopunktal.