Hans Walser, [20150127]

Schnittpunkt mit Dreiecken

1 Worum geht es?

Es wird ein Schnittpunkt mit Dreiecken erarbeitet. Die Schlüsselidee ist eine zentrische Streckung.

2 Dreiecke ansetzen

Wir beginnen mit einem beliebigen Dreieck $A_0B_0C_0$ (Abb. 1) und einer beliebigen reellen Zahl λ. Für die folgenden Figuren ist $\lambda = 0.6$ gewählt worden.

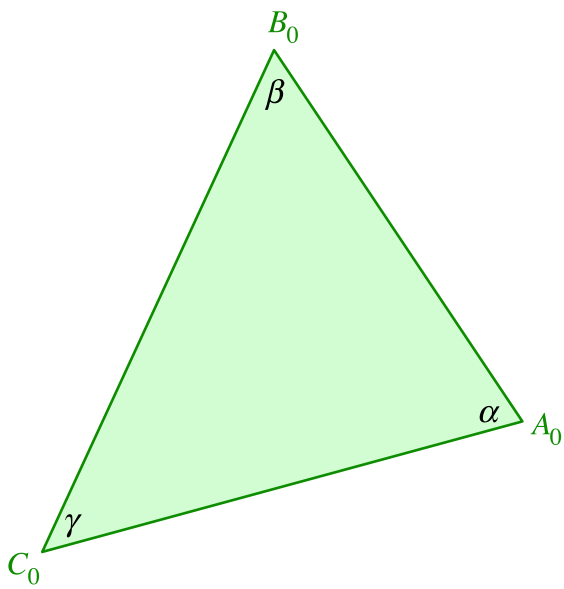

Abb. 1: Startdreieck

Nun verändern wir eine Kopie des Dreieckes mit dem Längenfaktor λ und setzen diese Kopie verdreht gemäß Abbildung 2 an.

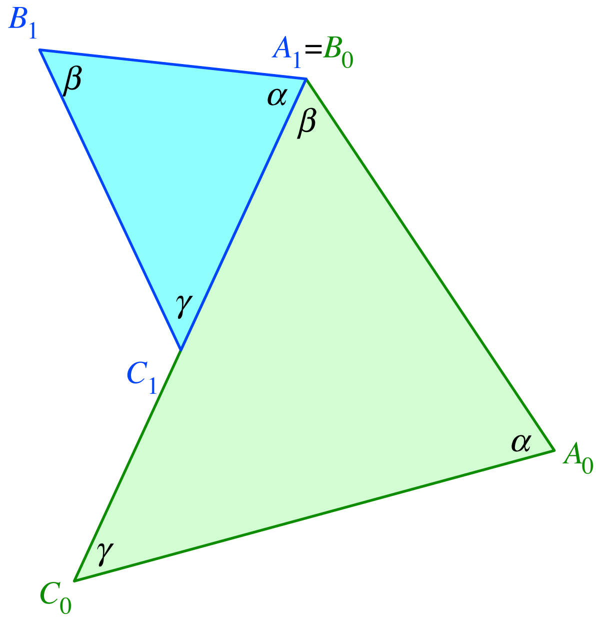

Abb. 2: Ansetzen des veränderten Dreiecks

Die Abbildung vom Dreieck $A_0B_0C_0$ zum Dreieck $A_1B_1C_1$ ist eine Drehstreckung mit dem Drehwinkel γ und dem Faktor λ.

Analog fügen wir ein weiteres Dreieck $A_2B_2C_2$ an (Abb. 3).

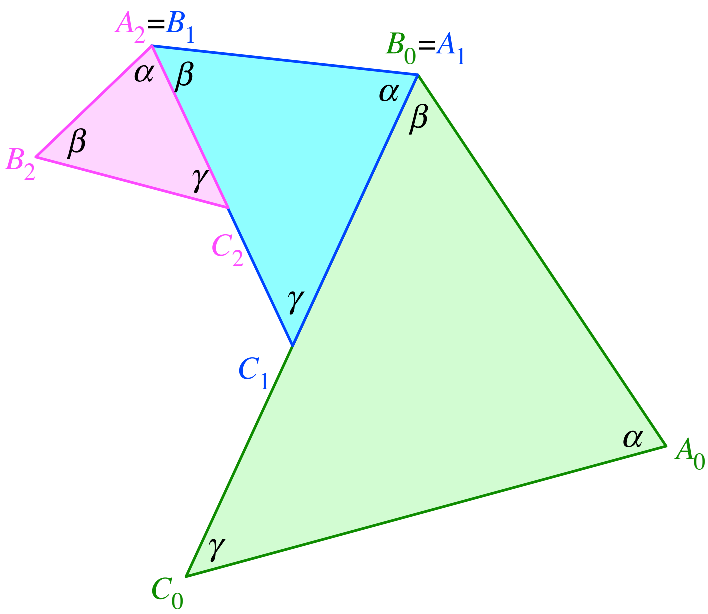

Abb. 3: Nächstes Dreieck

3 Umkreise

In der Situation der Abbildung 3 ist es nun so, dass sich die drei Umkreise der drei Dreiecke in einem Punkt schneiden (Abb. 4).

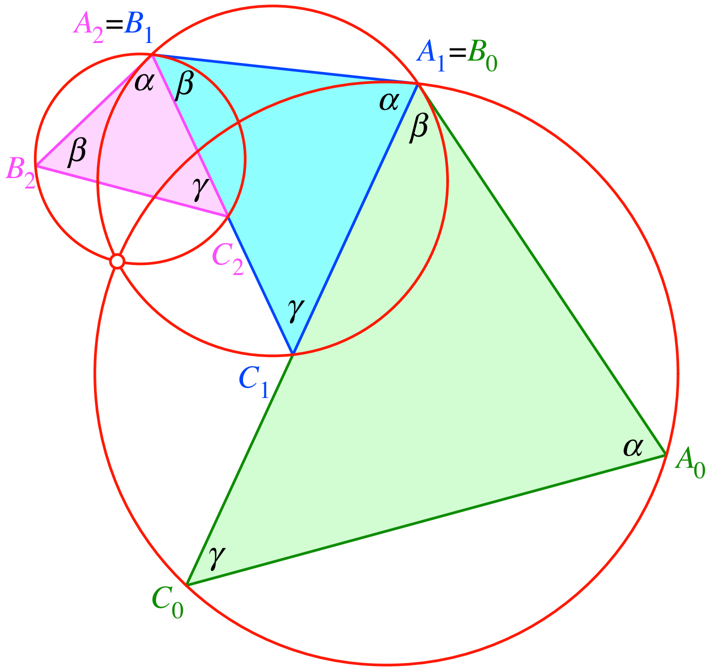

Abb. 4: Schnittpunkt der Umkreise

4 Beweis

Wir haben bereits festgestellt, dass die Abbildung vom Dreieck $A_0B_0C_0$ zum Dreieck $A_1B_1C_1$ eine Drehstreckung mit dem Drehwinkel γ und dem Faktor λ ist. Es sei S das Zentrum (Fixpunkt) dieser Drehstreckung. Dann ist der Winkel $\sphericalangle A_0SA_1$ gleich dem Drehwinkel, also $\sphericalangle A_0SA_1 = \gamma$. Somit liegt S auf dem Ortsbogen für die Strecke A_0A_1 und den Winkel γ . Wegen $A_1 = B_0$ ist das der Umkreis des Dreieckes $A_0B_0C_0$. Ebenso ist $\sphericalangle B_0SB_1 = \gamma$, und S liegt daher auf dem Umkreis des Dreieckes $A_1B_1C_1$. Somit ist S der Schnittpunkt der beiden ersten Umkreise. Da sich das Dreieck $A_2B_2C_2$ durch Iteration der zentrischen Streckung ergibt, liegt S entsprechend auch auf dem Umkreis dieses Dreieckes.

5 Iteration

Die Abbildung kann iteriert werden (Abb. 5). Wir erhalten eine eckige logarithmische Spirale mit dem Schnittpunkt der Umkreise als Zentrum.

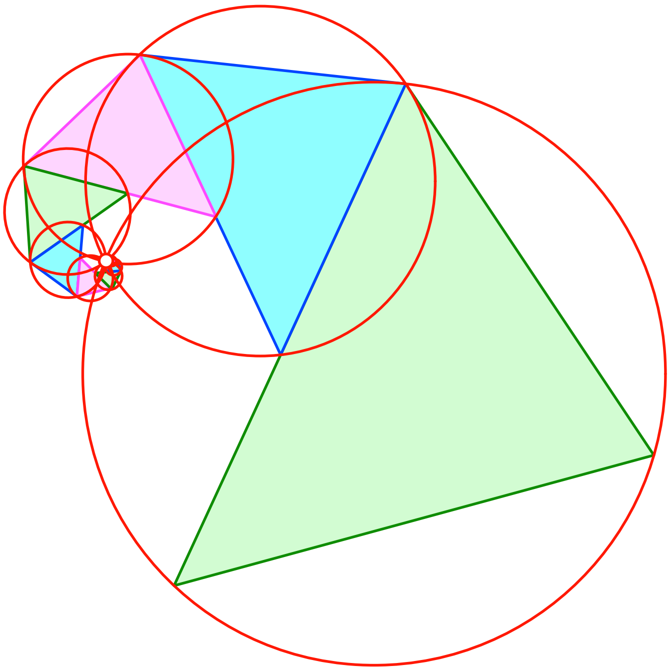

Abb. 5: Iteration

6 Sehnenvielecke

Der Sachverhalt kann auf Sehnenvielecke verallgemeinert werden. Die Abbildung 6 zeigt exemplarisch den Fall für ein Sehnenviereck.

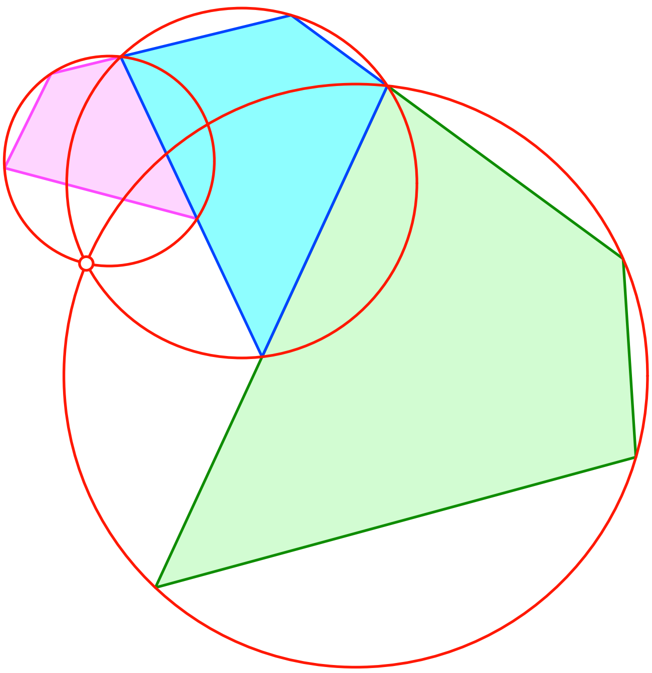

Abb. 6: Sehnenviereck

Beim Sehnenviereck gehen die Außenränder glatt durch. Das ist ein Sonderfall, die das Beispiel eines Sehnenfünfeckes zeigt (Abb. 7).

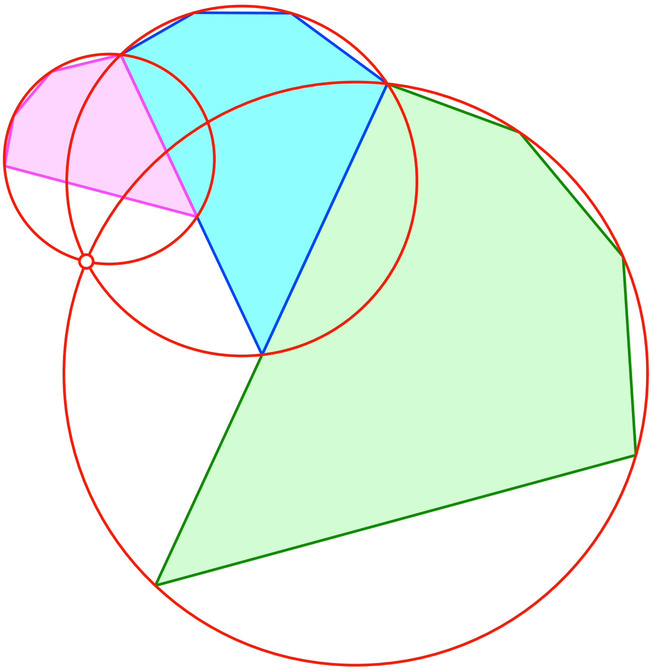

Abb. 7: Sehnenfünfeck

Literatur

Walser, Hans (2006): 99 Points of Intersection. Examples – Pictures – Proofs. Translated by Peter Hilton and Jean Pedersen. The Mathematical Association of America. ISBN 0-88385-553-4

Walser, Hans (2012): 99 Schnittpunkte. Beispiele – Bilder – Beweise. 2. Auflage. EAGLE, Edition am Gutenbergplatz: Leipzig. ISBN 978-3-937219-95-0

Websites

Abgerufen 26.01.2015

http://www.walser-h-m.ch/hans/Schnittpunkte