

Hans Walser, [20150202]

Schließungsfigur mit Kreisen

1 Die Schließungsfigur

Wir wählen ein (unregelmäßiges) n -Eck $A_0 \dots A_{n-1}$ und einen beliebigen Punkt M . Die Abbildung 1 zeigt die Situation für $n = 5$. Auf der Geraden $A_{n-1}A_0$ wählen wir einen Startpunkt P_0 .

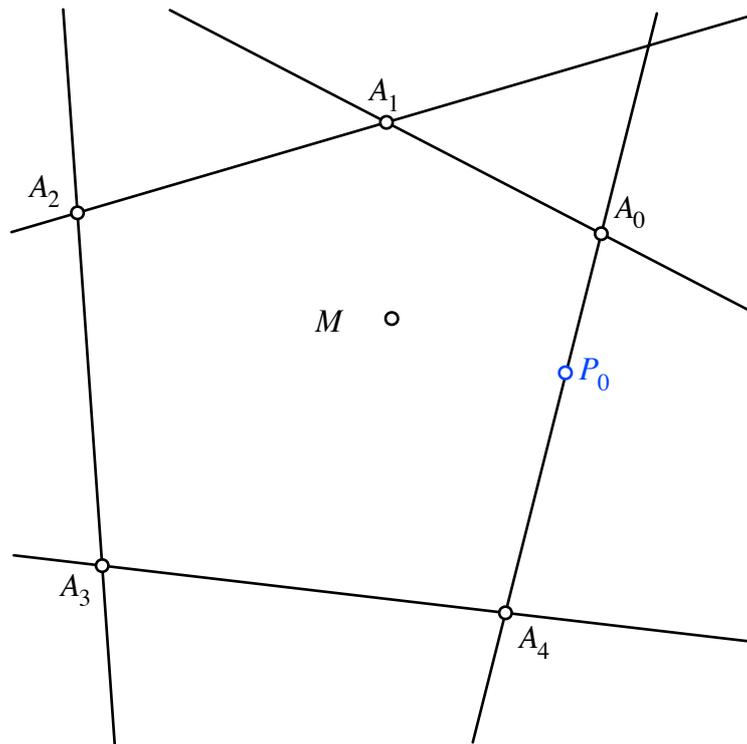


Abb. 1: Disposition

Den zweiten Schnittpunkt des Kreises c_0 durch M , P_0 und A_0 mit der Geraden A_0A_1 bezeichnen wir mit P_1 (Abb. 2).

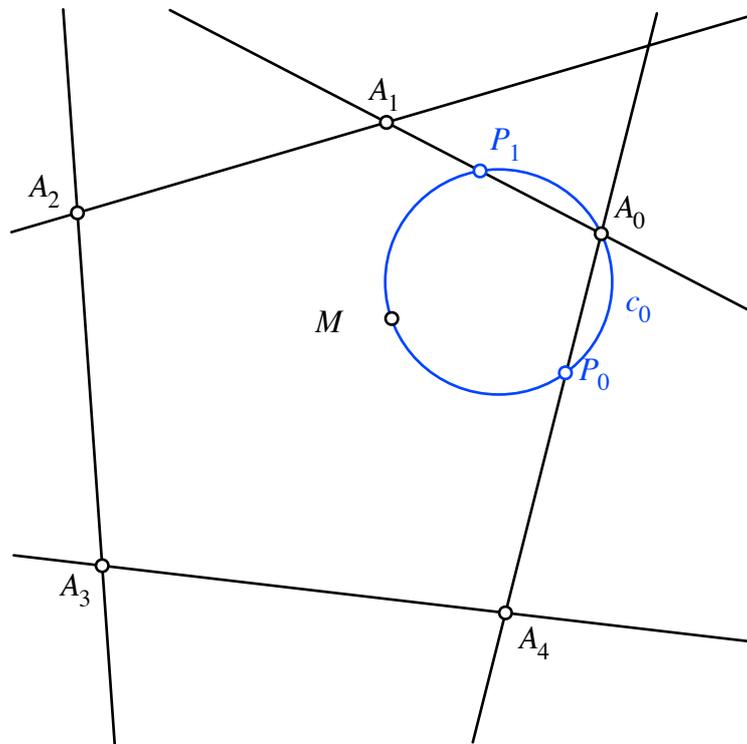


Abb. 2: Folgepunkt

Und nun iterieren wir: P_{i+1} ist der zweite Schnittpunkt des Kreises c_i durch M , P_i und A_i mit der Geraden A_iA_{i+1} .

Dann ist $P_n = P_0$, wir haben eine Schließungsfigur (Abb. 3).

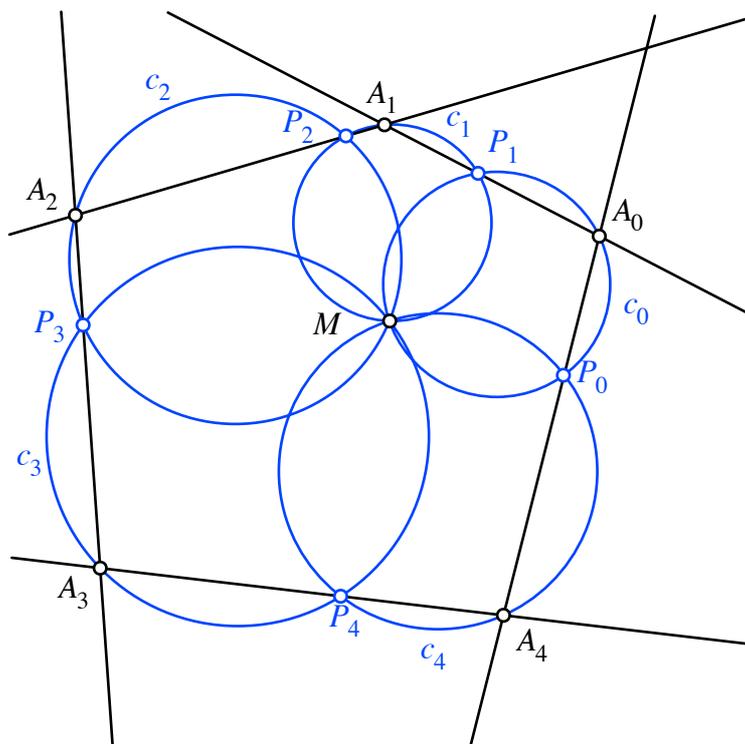


Abb. 3: Schließungsfigur

2 Beweis

Das Viereck $MP_0A_0P_1$ ist ein Sehnenviereck. Daher ergänzen sich die Winkel $\sphericalangle A_0P_0M$ und $\sphericalangle MP_1A_0$ auf 180° . Damit ist aber der Nebenwinkel $\sphericalangle A_1P_1M$ gleich groß wie $\sphericalangle A_0P_0M$. Allgemein sind alle Winkel $\sphericalangle A_iP_iM$, $i = 0, 1, 2, \dots$ untereinander gleich groß. Das beweist die Schließungseigenschaft. Die Schließungseigenschaft ist unabhängig von n .

Die Abbildung 4 zeigt die relevanten Sehnenvierecke.

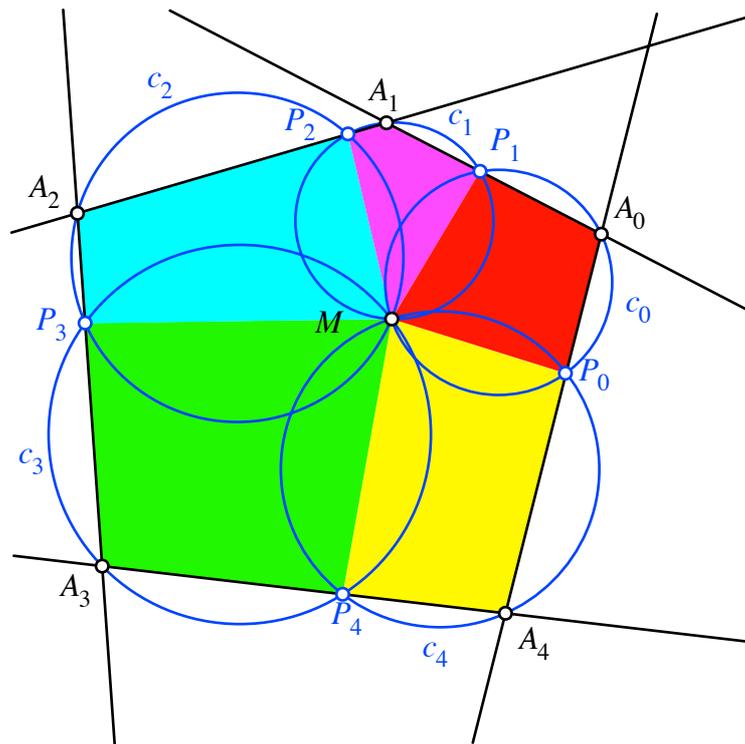


Abb. 4: Sehnenvierecke

3 Shortcut

Die Diagonale A_3A_0 verläuft durch den zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise c_3 und c_0 (Abb. 5).

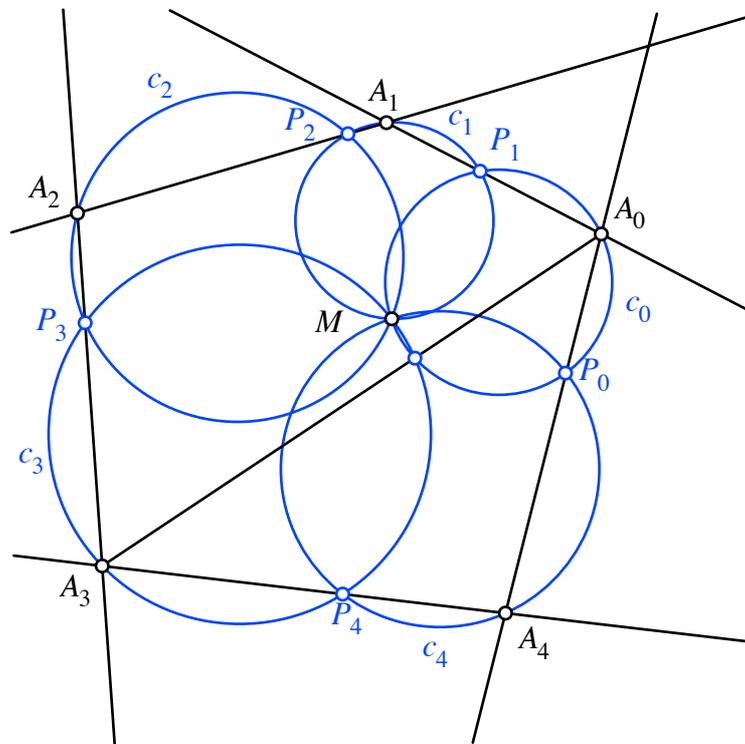


Abb. 5: Shortcut

Das ist klar, denn wir hätten statt mit dem Fünfeck $A_0 \dots A_4$ auch mit dem Viereck $A_0 \dots A_3$ operieren können.

Allgemein verläuft die Gerade A_iA_j durch den Schnittpunkt der beiden Kreise c_i und c_j (Abb. 6).

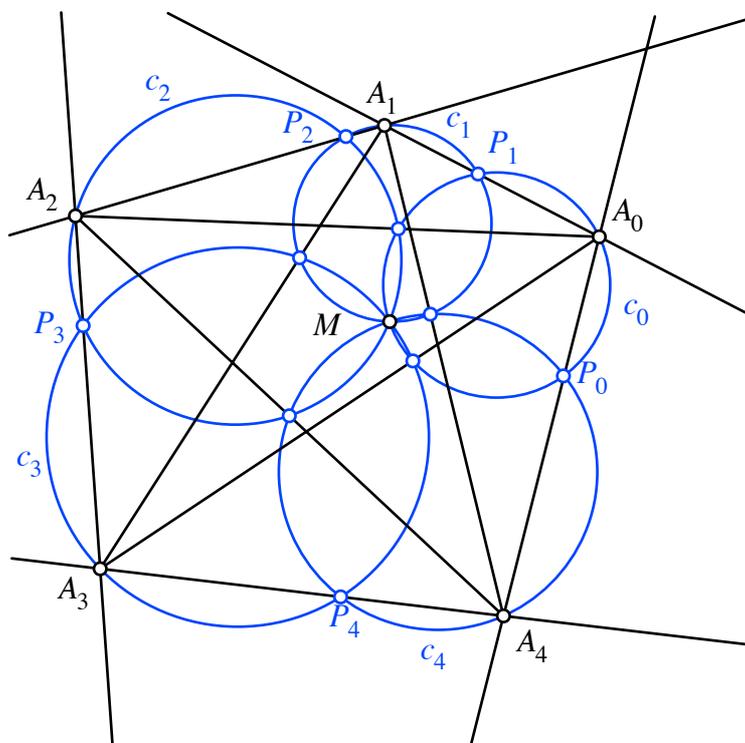


Abb. 6: Seiten und Diagonalen

Die Abbildung 7 zeigt dieselbe Situation für $n = 7$.

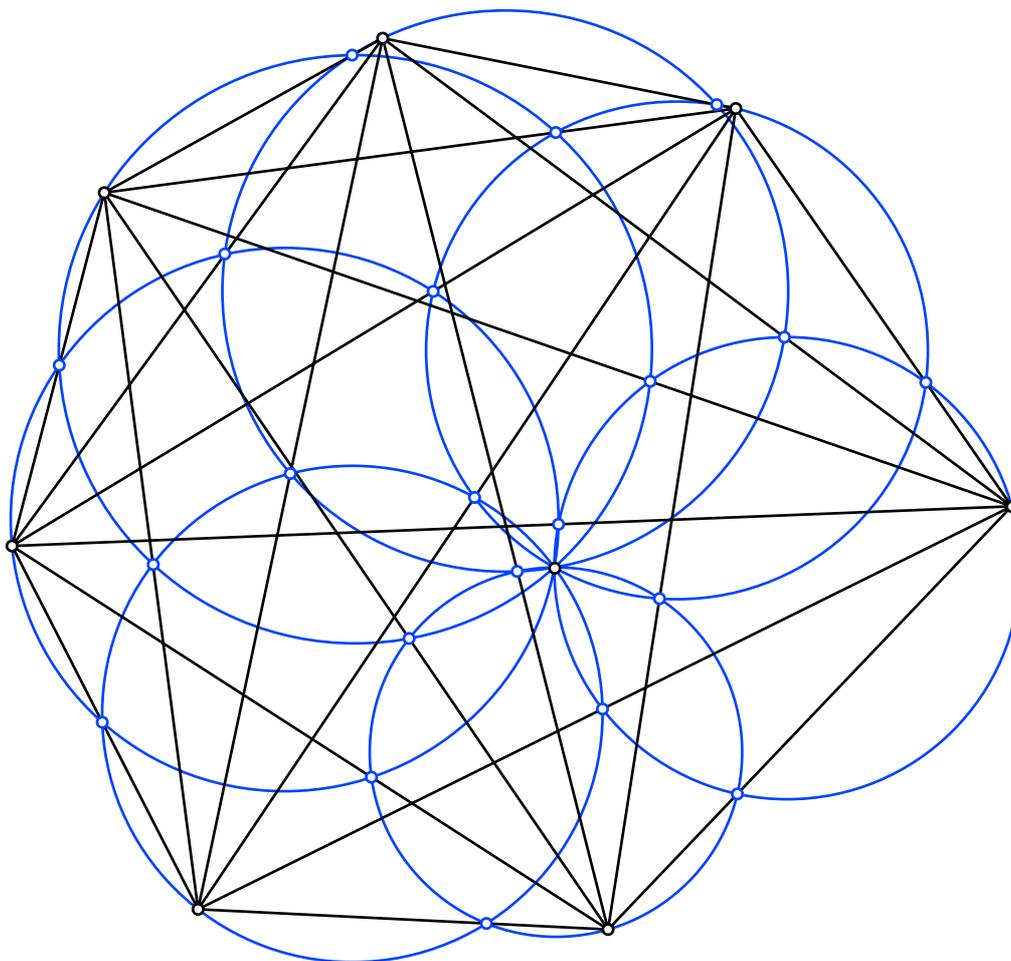


Abb. 7: Siebeneck

4 Kreise gegeben

Natürlich kann auch umgekehrt vorgegangen werden: Wir geben n Punkte P_0, \dots, P_{n-1} vor sowie einen Punkt M . Dann zeichnen wir Kreise c_i durch M , P_i und P_{i+1} (Abb. 8). Auf dem Kreis c_0 wählen wir einen Startpunkt A_0 .

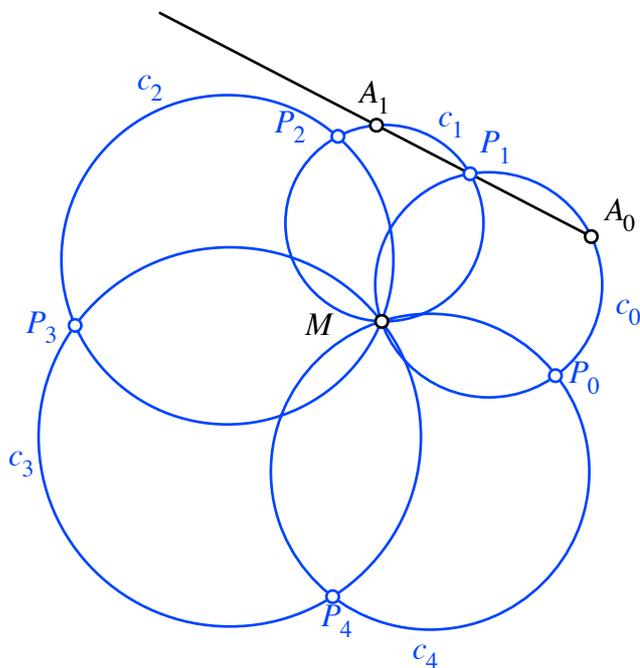


Abb. 8: Umgekehrtes Vorgehen

Den Punkt A_1 finden wir nun als Schnittpunkt der Geraden A_0P_1 mit dem Kreis c_1 .

Entsprechend finden wir die übrigen Punkte A_i und erhalten eine Schließungsfigur (Abb. 9).

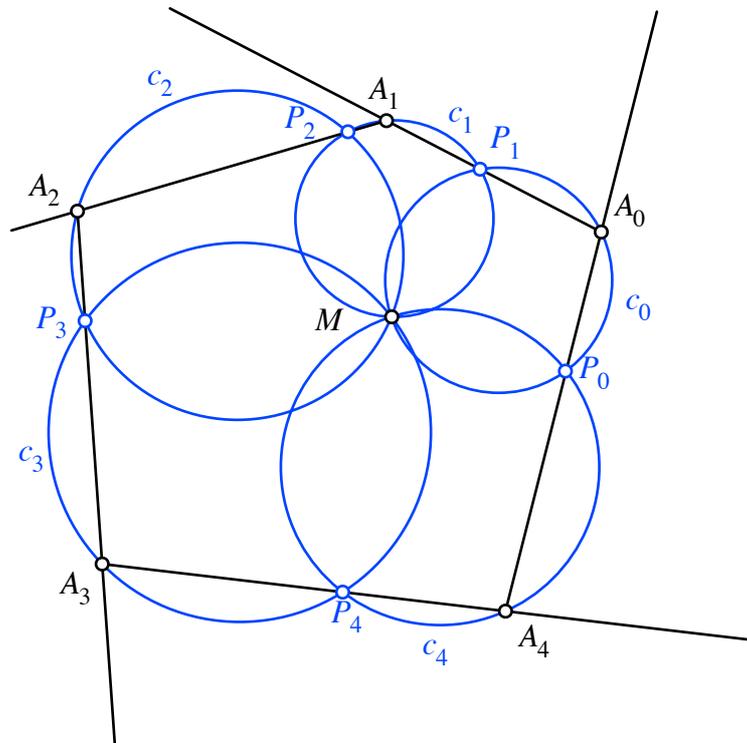


Abb. 9: Schließungsfigur