Hans Walser, [20150101]

Schachbrett-Geometrie

1 Worum es geht

Auf dem Schachbrett wird eine Metrik definiert, die sich an den Bewegungen von Schachfiguren orientiert. Für eine bestimmte Schachfigur ist der Abstand zwischen zwei Feldern des Schachbrettes die minimale Anzahl Züge, um mit dieser Figur von einem Feld zum andern zu gelangen.

Zusätzlich studieren wir die Anzahl der Wege minimaler Länge von einem Feld zum anderen.

2 Beispiele

In den Beispielen werden die Abstände gemäß Tabelle 1 farblich codiert.

Abstand	0	1	2	3	4	5	6
Farbe	schwarz	rot	grün	gelb	blau	magenta	zyan

Tab. 1: Farbcodierung

2.1 Bauern

Da die Bauern nicht rückwärts ziehen können, ergibt sich eine asymmetrische Metrik. Zudem kann auf einem leeren Schachbrett ein Bauer nur geradeaus ziehen. Er kann nicht jedes Feld erreichen.

Daher lassen wir die Bauern aus unseren Überlegungen weg.

2.2 Turm

2.2.1 Üblicher Turm

Die Felder in der gleichen Spalte oder in der gleichen Zeile wie das Ausgangsfeld haben davon den Abstand 1, und es gibt nur einen Minimalweg dazu. Diese Felder sind in der Abbildung 1 rot markiert.

Alle übrigen Felder haben den Abstand 2, und es gibt genau zwei Minimalwege dazu. Diese Felder sind in der Abbildung 1 grün markiert.

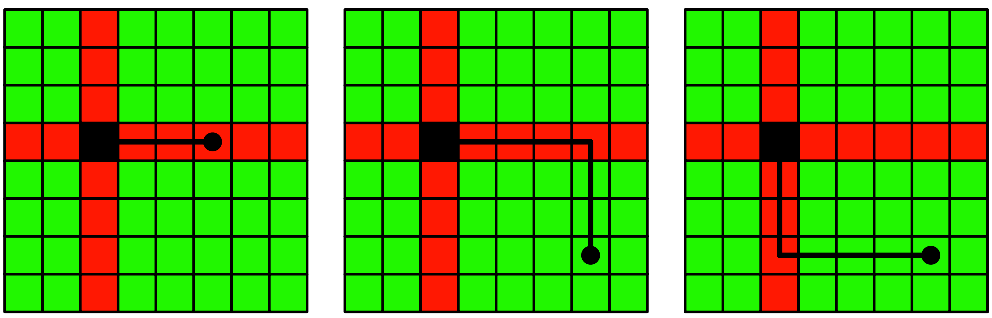

Abb. 1: Situation für einen Turm

Das ist nicht besonders spannend. Wir ändern daher die Regeln für den Turm leicht ab.

2.2.2 Einschrittiger Turm

De Turm soll nur senkrecht oder waagerecht ins Nachbarfeld ziehen können. Die Abbildung 2 zeigt die jeweils in gleicher Farbe die Felder, welche vom zentralen schwarzen Feld denselben Abstand haben. Diese „Kreise“ sind spitzständige Quadrate.

Aus ästhetischen Gründen wurde das Schachbrett größenmäßig dem Problem angepasst.

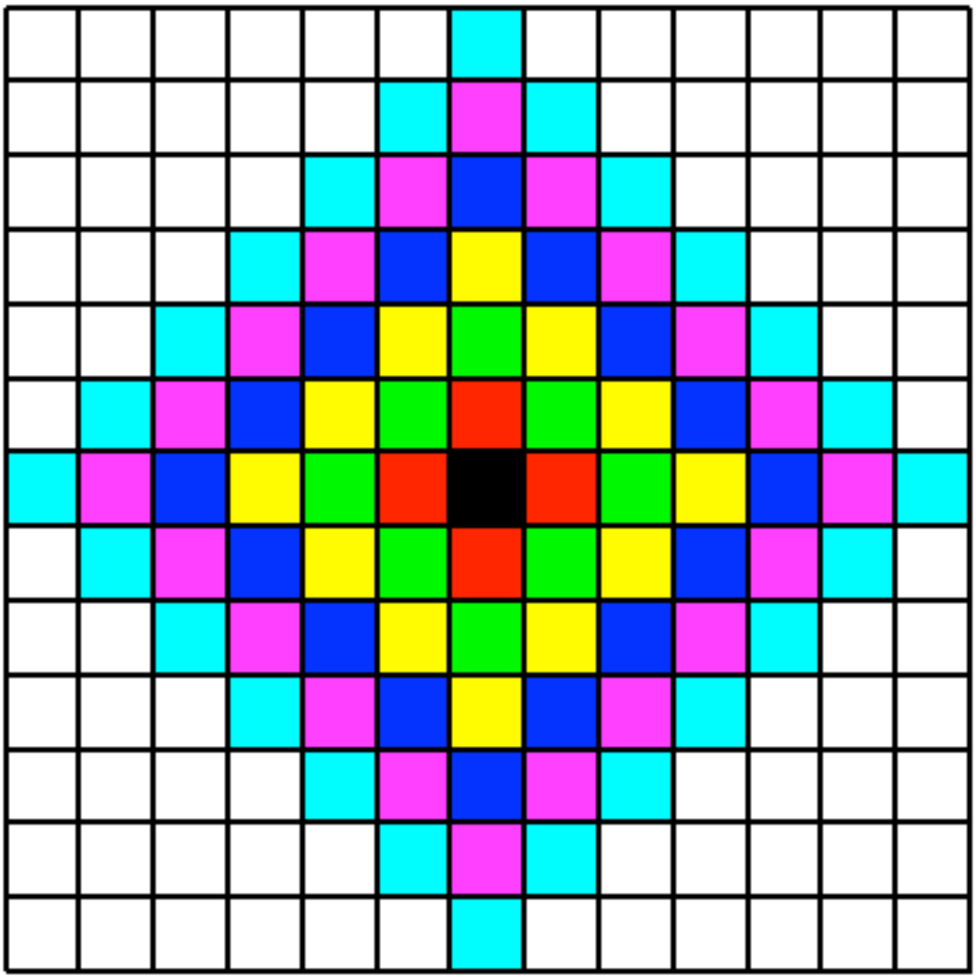

Abb. 2: Abstände für einen einschrittigen Turm

In der Abbildung 3 sind die Anzahlen der Minimalwege eingetragen, welche vom Zentrum aus zu den jeweiligen Feldern führen. Wir erkennen die Binomialkoeffizienten.

						1						
					6	1	6					
				15	5	1	5	15				
			20	10	4	1	4	10	20			
		15	10	6	3	1	3	6	10	15		
	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	
		15	10	6	3	1	3	6	10	15		
			20	10	4	1	4	10	20			
				15	5	1	5	15				
					6	1	6					
						1						

Abb. 3: Anzahl Wege für den einschrittigen Turm

2.3 Läufer

2.3.1 Üblicher Läufer

Für einen Läufer (Abb. 4) ist die Situation im Prinzip gleich wie für einen Turm, nur eben diagonal. Zudem sind ihm nur die Hälfte der Felder zugänglich.

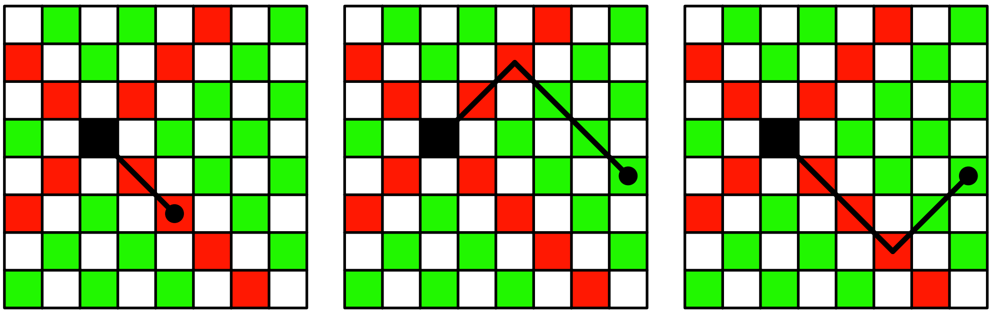

Abb. 4: Situation für den Läufer

2.3.2 Einschrittiger Läufer

Die Abbildung 5 zeigt die Abstandssituation für einen einschrittigen Läufer. Die „Kreise“ sind jetzt bodenständige Quadrate.

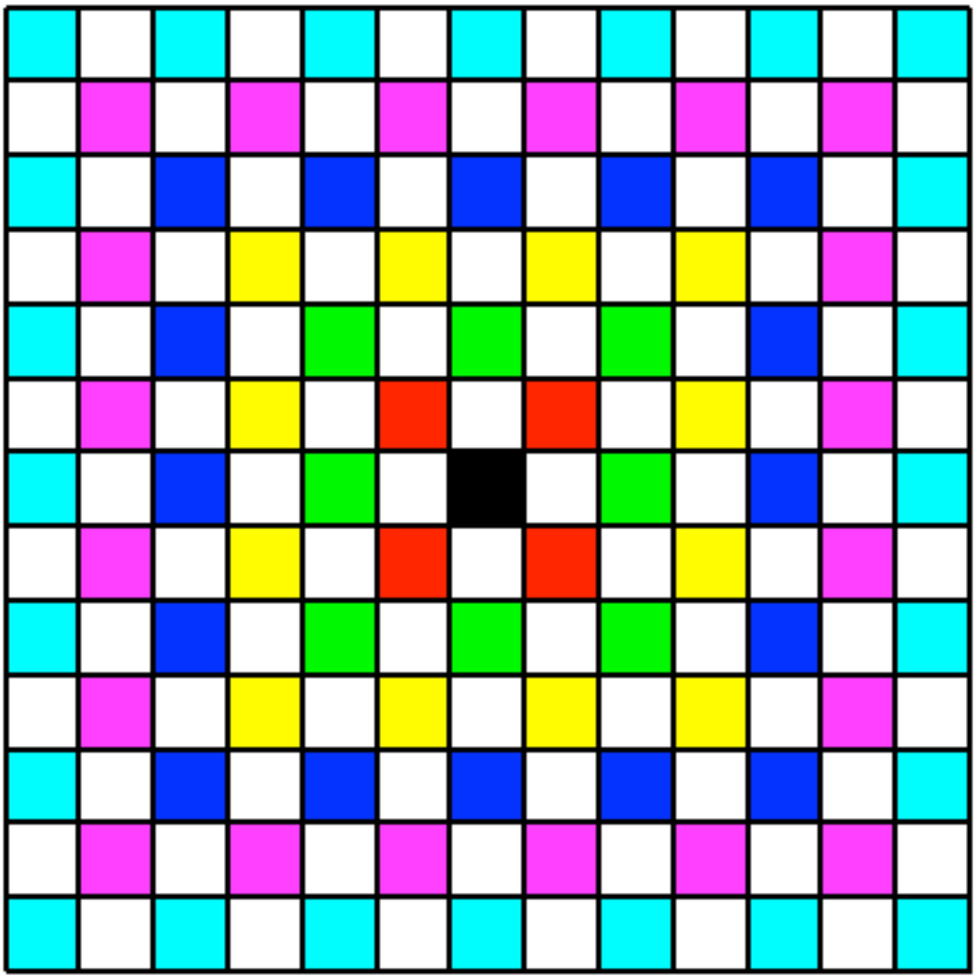

Abb. 5: Abstände für einen einschrittigen Läufer

Die Abbildung 6 zeigt die Anzahlen der Minimalwege. Es ergeben sich wiederum die Binomialkoeffizienten.

1		6		15		20		15		6		1
	1		5		10		10		5		1	
6		1		4		6		4		1		6
	5		1		3		3		1		5	
15		4		1		2		1		4		15
	10		3		1		1		3		10	
20		6		2		1		2		6		20
	10		3		1		1		3		10	
15		4		1		2		1		4		15
	5		1		3		3		1		5	
6		1		4		6		4		1		6
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

Abb. 6: Anzahl Wege für den einschrittigen Läufer

2.4 Dame

Die Abbildung 7 zeigt die Farbcodierung der Abstände für die Dame.

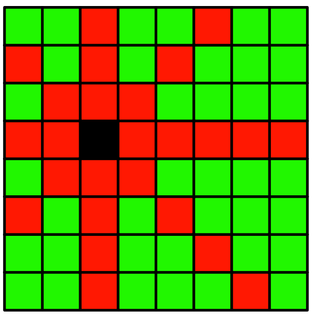

Abb. 7: Abstände für die Dame

Felder mit dem Abstand 2, welche bezüglich des Schachbrettes dieselbe Farbe haben, lassen bis zu 12 Wege zu (Abb. 8).

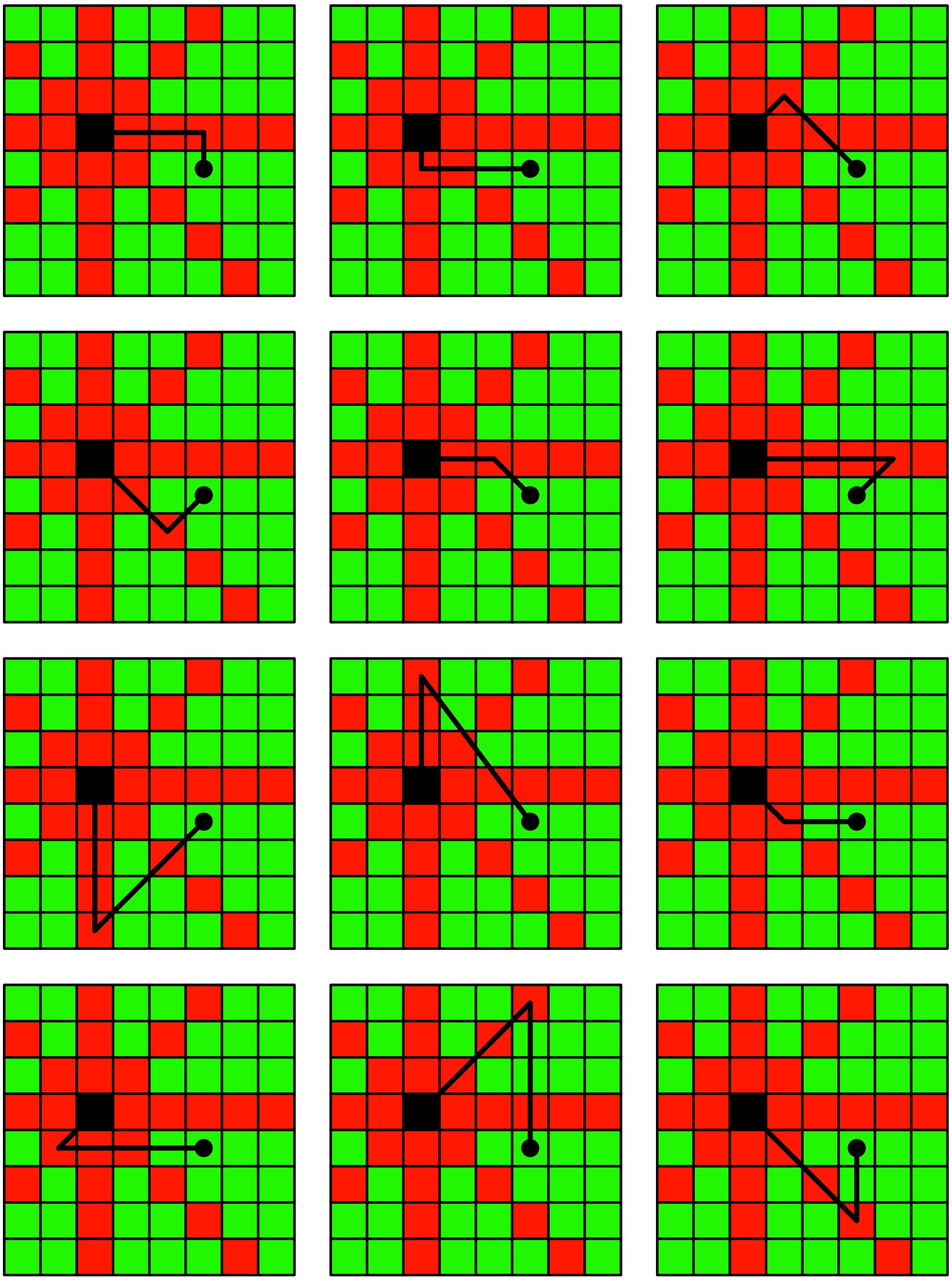

Abb. 8: Es führen viele Wege nach Rom

2.5 König

Der König ist eine einschrittige Dame. Die Abbildung 9 zeigt die Distanzen. Die „Kreise“ sind bodenständige Quadrate.

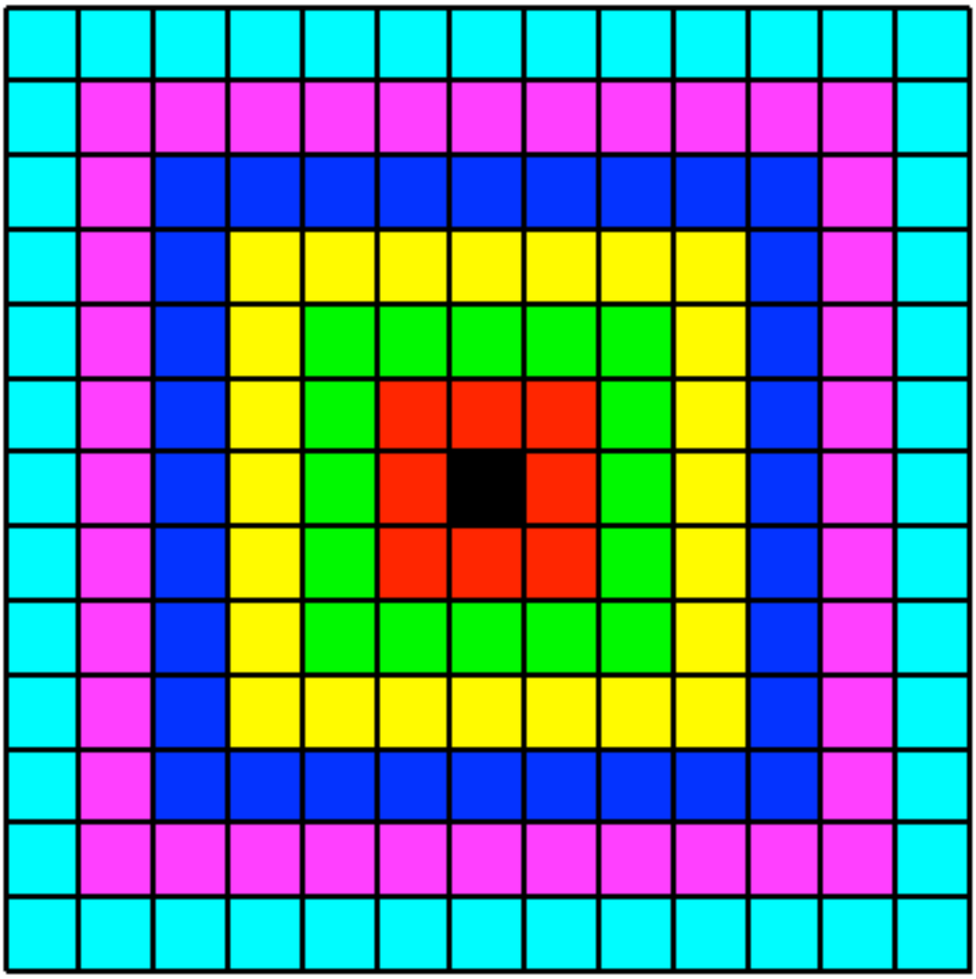

Abb. 9: Abstände für den König

Für die Anzahl der Minimalwege erhalten wir die Daten der Abbildung 10.

1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1
6	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	6
21	5	1	4	10	16	19	16	10	4	1	5	21
50	15	4	1	3	6	7	6	3	1	4	15	50
90	30	10	3	1	2	3	2	1	3	10	30	90
126	45	16	6	2	1	1	1	2	6	16	45	126
141	51	19	7	3	1	1	1	3	7	19	51	141
126	45	16	6	2	1	1	1	2	6	16	45	126
90	30	10	3	1	2	3	2	1	3	10	30	90
50	15	4	1	3	6	7	6	3	1	4	15	50
21	5	1	4	10	16	19	16	10	4	1	5	21
6	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1	6
1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1

Abb. 10: Anzahl Wege für den König

Es handelt sich beim Zahlendreieck von der Mitte aus nach unten um die *Trinomialkoeffizienten* in folgender Schreibweise:

$$\left(a^2+ab+b^2\right)^0=1$$

$$\left(a^2+ab+b^2\right)^1=1a^2+1ab+1b^2$$

$$\left(a^2+ab+b^2\right)^2=1a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+1b^4$$

$$\left(a^2+ab+b^2\right)^3=1a^6+3a^5b+6a^4b^2+7a^3b^3+6a^2b^4+3ab^5+1b^6$$

$$\left(a^2+ab+b^2\right)^4=1a^8+4a^7b+10a^6b^2+16a^5b^3+19a^4b^4+16a^3b^5+10a^2b^6+4ab^7+1b^8$$

Eine alternative Schreibweise geht mit Polynomen in x (siehe[1]):

$$\left(x^2+x+1\right)^0=1$$

$$\left(x^2+x+1\right)^1=1x^2+1x+1$$

$$\left(x^2+x+1\right)^2=1x^4+2x^3+3x^2+2x+1$$

$$\left(x^2+x+1\right)^3=1x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$$

$$\left(x^2+x+1\right)^4=1x^8+4x^7+10x^6+16x^5+19x^4+16x^3+10x^2+4x+1$$

2.6 Springer

Für einen Springer ergeben sind die Abstände gemäß Abbildung 11.

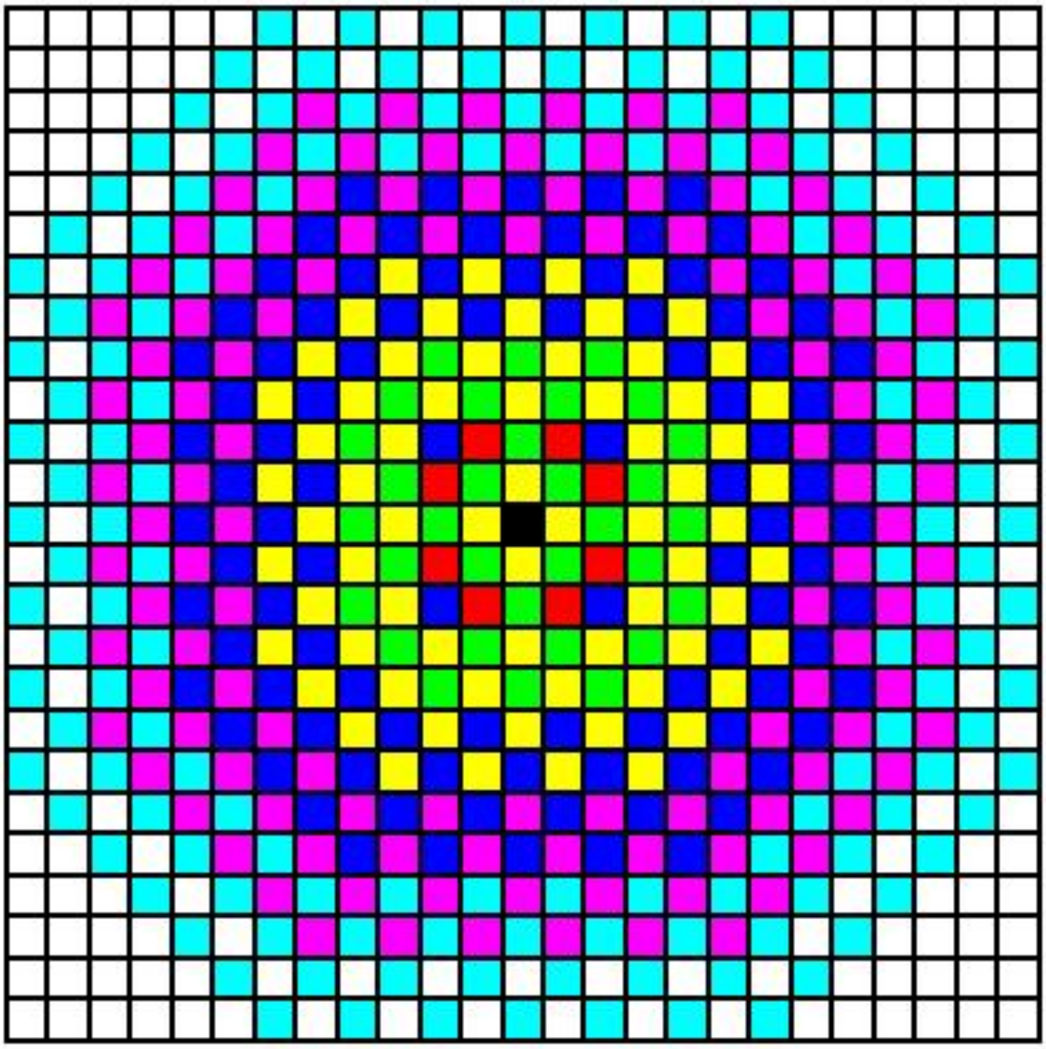

Abb. 11: Abstände für den Springer

Wir sehen, dass die „Monotonie“ gestört ist. Die Felder unmittelbar neben dem Ursprungsfeld (im Sinne der üblichen Metrik) haben von diesem den Abstand 3.

Die Abbildung 12 zeigt die Situation nur bis zum Abstand 4.

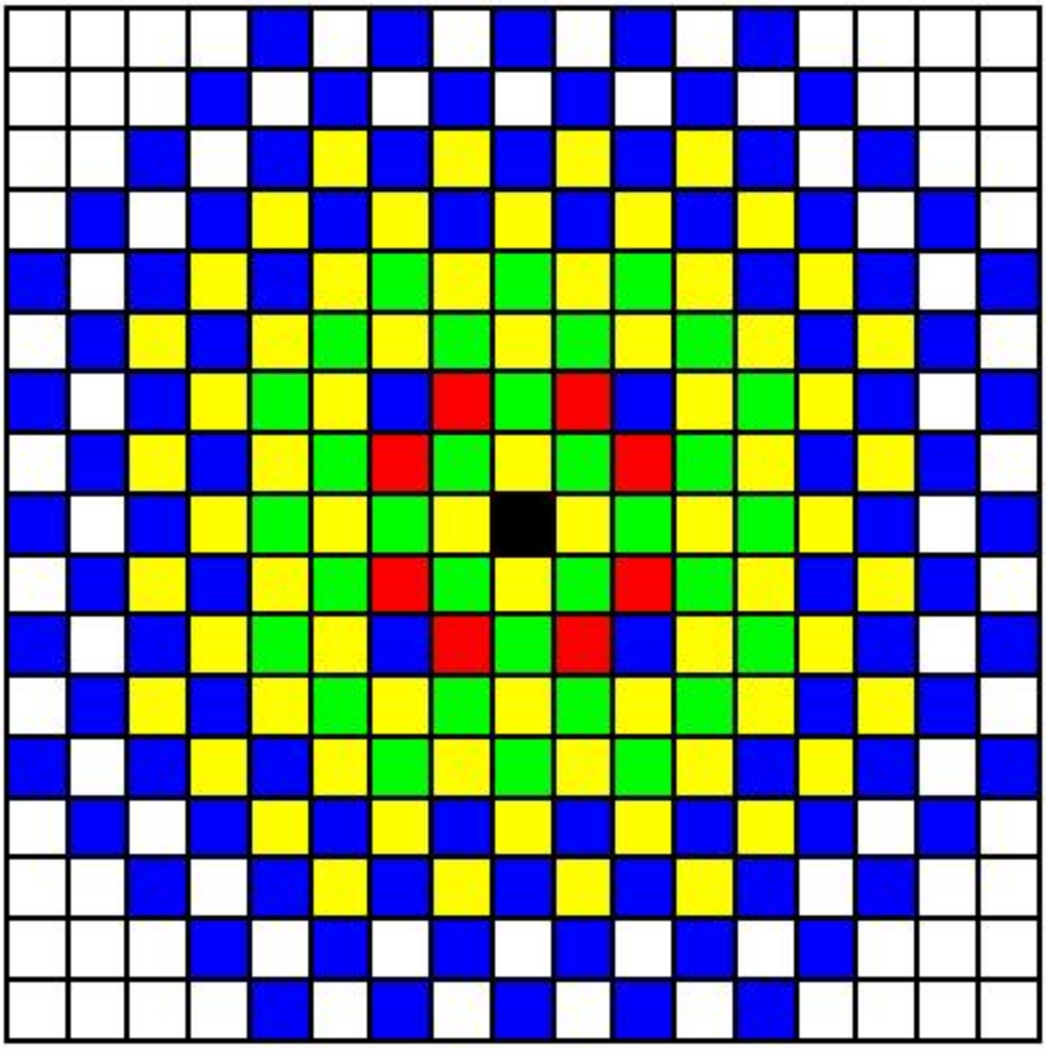

Abb. 12: Abstände bis 4 für den Springer

Auch für die Anzahl Wege wird es dramatisch (Abb. 13, ebenfalls nur bis Abstand 4).

				1		4		6		4		1				
			4		12		16		16		12		4			
		6		12	1	18	3	24	3	18	1	12		6		
	4		8	3	24	6	28	6	28	6	24	3	8		4	
1		12	3	32	3	1	6	2	6	1	3	32	3	12		1
	12	1	24	3	2	9	2	6	2	9	2	3	24	1	12	
4		18	6	1	9	54	1	2	1	54	9	1	6	18		4
	16	3	28	6	2	1	2	12	2	1	2	6	28	3	16	
6		24	6	2	6	2	12	1	12	2	6	2	6	24		6
	16	3	28	6	2	1	2	12	2	1	2	6	28	3	16	
4		18	6	1	9	54	1	2	1	54	9	1	6	18		4
	12	1	24	3	2	9	2	6	2	9	2	3	24	1	12	
1		12	3	32	3	1	6	2	6	1	3	32	3	12		1
	4		8	3	24	6	28	6	28	6	24	3	8		4	
		6		12	1	18	3	24	3	18	1	12		6		
			4		12		16		16		12		4			
				1		4		6		4		1				

Abb. 13: Anzahl Wege für den Springer

Wir erkennen zwar am äußersten Rand die Binomialkoeffizienten. Auch im Innern kann man sie in einer Rösselsprung-Disposition finden.

Die Abbildung 14 zeigt eine Überlagerung der Abbildungen 12 und 13.

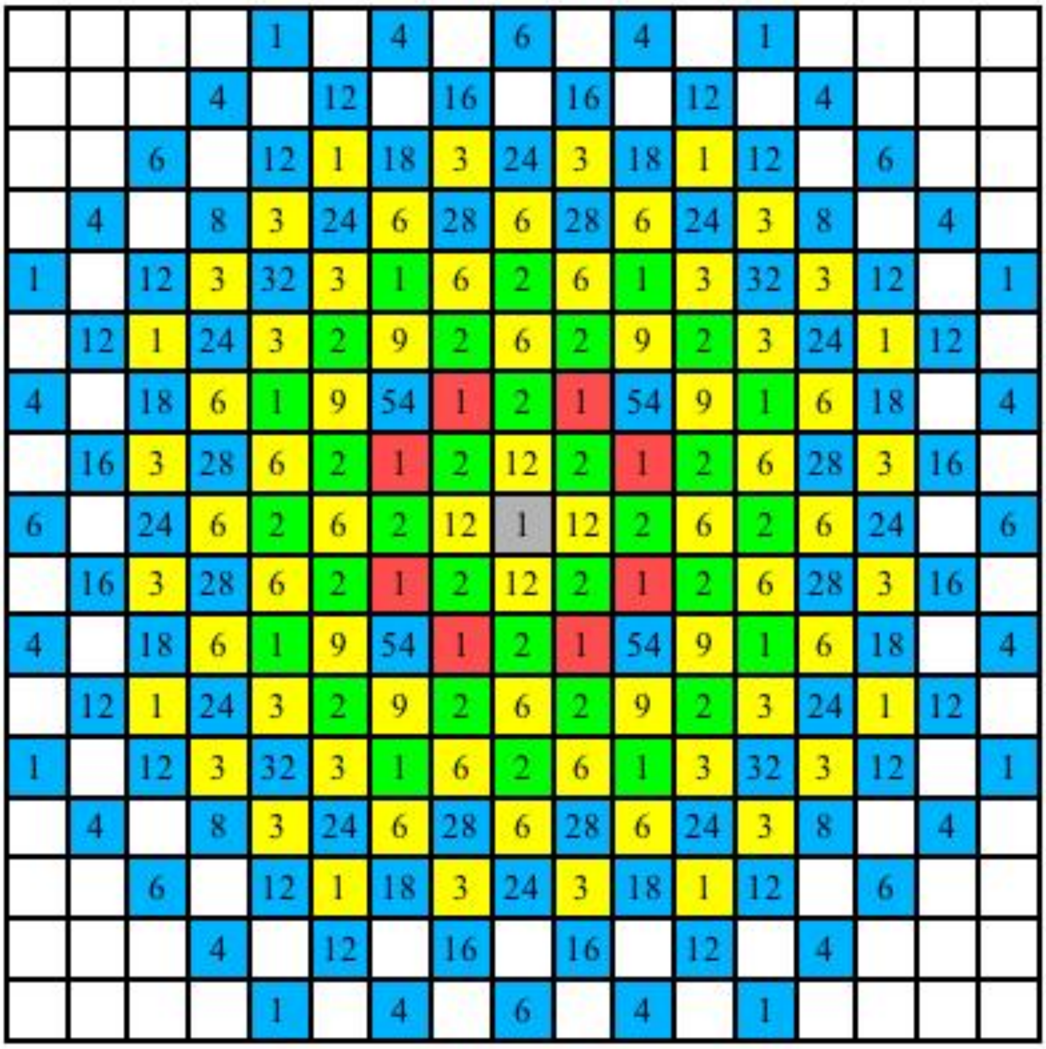

Abb. 14: Abstand farbcodiert, Anzahl Wege als Zahl, für den Springer

Die Abbildung 15 zeigt einen Ausschnitt rechts oben. Darin ist blau der Kreis eingezeichnet, der genau durch diejenigen gelben Felder geht, von denen aus das in der Abbildung 15 zentrale blaue Feld mit einem Rösselsprung erreicht werden kann. Diese gelben Felder haben vom Ursprungsfeld den Abstand 3, das blaue Feld also den Abstand 4.

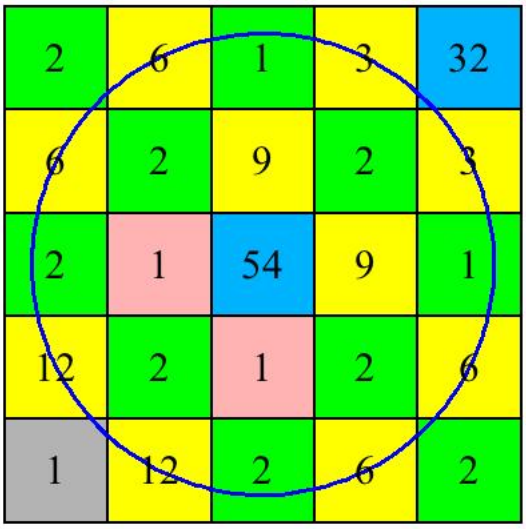

Abb. 15: Ausschnitt

Die Wege zum blauen Feld laufen über eines dieser gelben Felder. Für die Anzahl der Wege vom Ursprung zum blauen Feld erhalten wir also die Summe der Weganzahlen zu den gelben Feldern. Das ist:

$$3+3+6+6+12+12+6+6=54$$

Der blaue Kreis hat den Radius $\sqrt{5}$. Das schmeckt nach dem Goldenen Schnitt. Tatsächlich finden wir den Goldenen Schnitt etwa gemäß Abbildung 16, und zwar in der Reihenfolge Minor-Major-Minor.

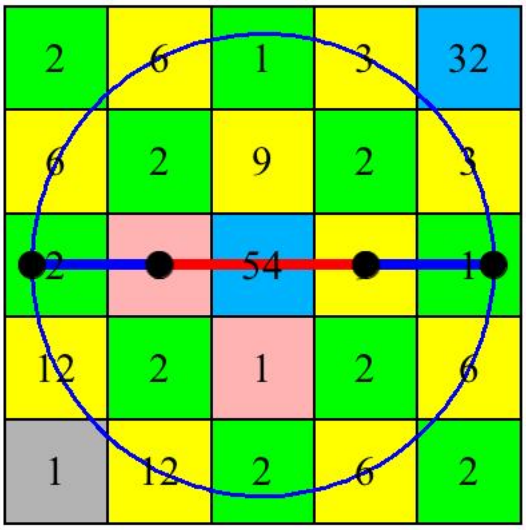

Abb. 16: Goldener Schnitt

Websites

[1] https://oeis.org