Hans Walser, [20071208b]

Regelmäßiges *n*-Eck und regelmäßiger *n*-Pass

1 Worum es geht

Die übliche Parameterdarstellung des Kreises wird so modifiziert, dass regelmäßige Figuren mit n Ecken entstehen.

2 *n*-Eck im Einheitskreis

2.1 Spitzen und Hügel

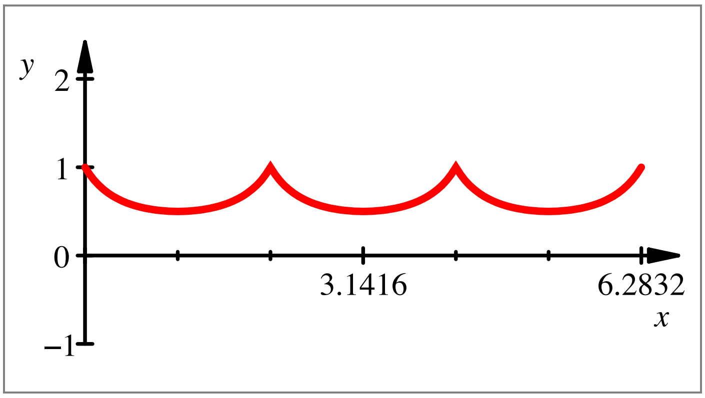
Wir arbeiten mit der Funktion:

$$f(n,t) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\max\limits_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n} - \left(t - k\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\left(\frac{nt-\pi}{2\pi} - \operatorname{round}\left(\frac{nt-\pi}{2\pi}\right)\right)\frac{2\pi}{n}\right)}$$

MuPAD:

```
f:=(n,t)->cos(PI/n)/cos(((n*t-PI)/(2*PI)-round((n*t-
PI)/(2*PI)))*2*PI/n):
```

Für $n = 3$ und $t \in [0, 2\pi]$ sieht das so aus:

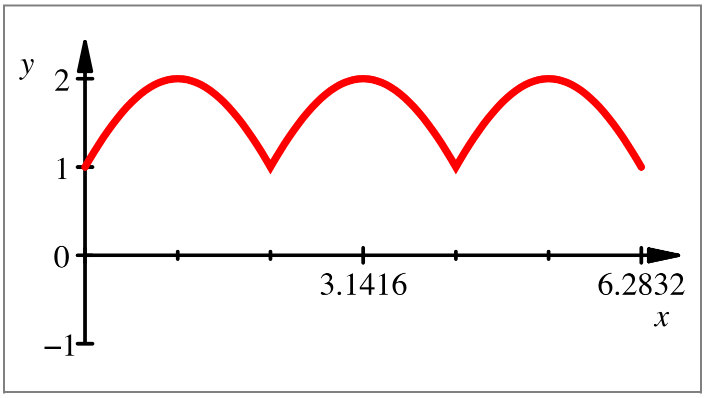


Die Funktion

Für den Kehrwert der Funktion $f(n,t)$, also für

$$g(n,t) = \frac{\max\limits_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n} - \left(t - k\frac{2\pi}{n}\right)\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\cos\left(\left(\frac{nt-\pi}{2\pi} - \operatorname{round}\left(\frac{nt-\pi}{2\pi}\right)\right)\frac{2\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)},$$

ergibt sich ein Funktionsgraf mit „Hügeln“.



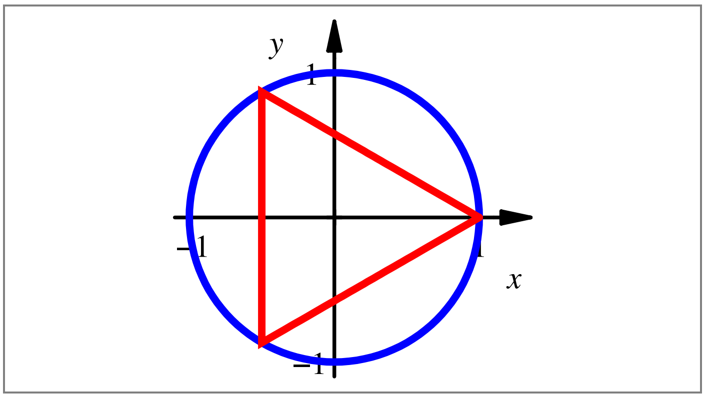
Kehrwert

2.2 Das regelmäßige *n*-Eck

Wir verwenden nun die Funktion $f(n,t)$ als variablen „Radius" eines Kreises:

$$\vec{x}(n,t) = f(n,t)\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\left(\frac{nt-\pi}{2\pi} - \operatorname{round}\left(\frac{nt-\pi}{2\pi}\right)\right)\frac{2\pi}{n}\right)}\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Für $n = 3$ erhalten wir:



Dreieck

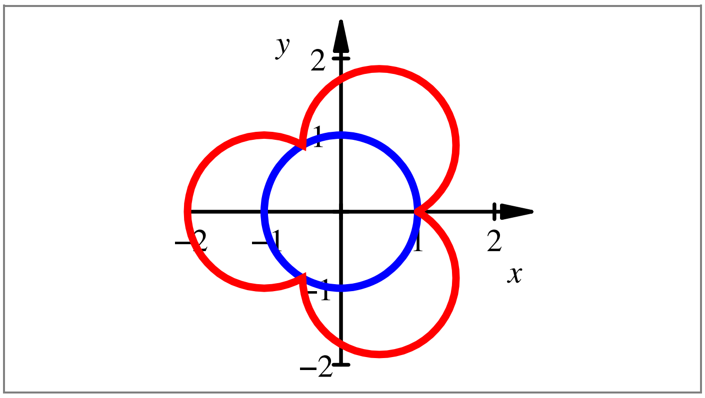
Es gibt ein gleichseitiges Dreieck im Einheitskreis. Allgemein erhalten wir ein regelmäßiges *n*-Eck im Einheitskreis.

2.3 Der regelmäßige *n*-Pass

Mit der Funktion $g(n,t)$ ergibt sich:

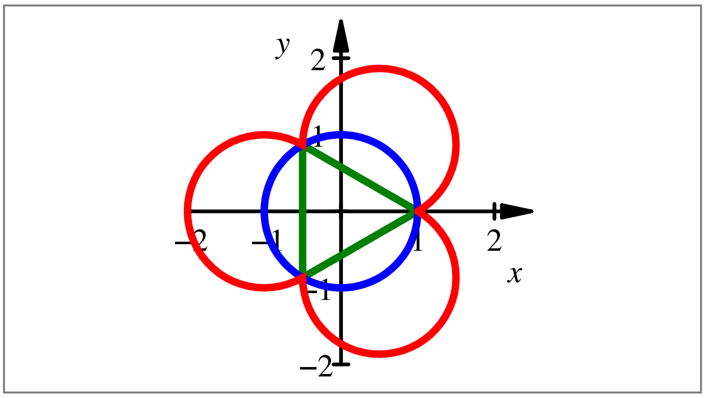
$$\vec{x}(n,t) = g(n,t)\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix} = \frac{\cos\left(\left(\frac{nt-\pi}{2\pi} - \operatorname{round}\left(\frac{nt-\pi}{2\pi}\right)\right)\frac{2\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Für $n = 3$ erhalten wir einen so genannten Dreipass:



Dreipass

Dieser Dreipass ergibt sich aus dem Dreieck durch Spiegelung am Einheitskreis.



Kreisspiegelung

3 *n*-Eck mit Einheitskreis als Inkreis

3.1 Hügel und Spitzen

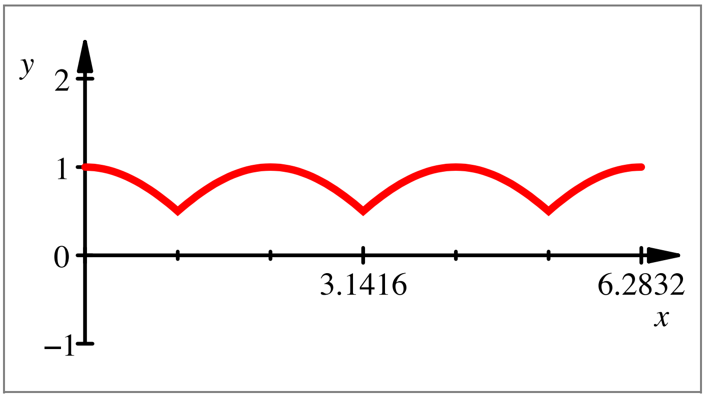
Wir arbeiten mit der Funktion:

$$f(n,t) = \max_{k=1}^{n}\left(\cos\left(t - k\tfrac{2\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(\left(\tfrac{nt}{2\pi} - \operatorname{round}\left(\tfrac{nt}{2\pi}\right)\right)\tfrac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)$$

MuPAD:

```
f:=(n,t)->cos((n*t/(2*PI)-round(n*t/(2*PI)))*2*PI/n):
```

Für $n = 3$ und $t \in [0, 2\pi]$ sieht das so aus:



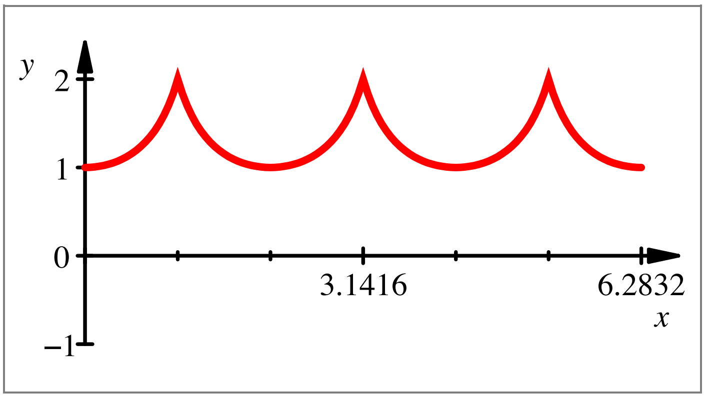
Die Funktion

Die Funktion ist sozusagen die obere Kontur des Drei-Phasen-Wechselstromes.

Für den Kehrwert erhalten wir:

$$g(n,t) = \frac{1}{\max\limits_{k=1}^{n}\left(\cos\left(t - k\frac{2\pi}{n}\right)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\left(\frac{nt}{2\pi} - \mathrm{round}\left(\frac{nt}{2\pi}\right)\right)\frac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)}$$

Für $n = 3$ und $t \in [0, 2\pi]$ sieht das so aus:



Kehrwert

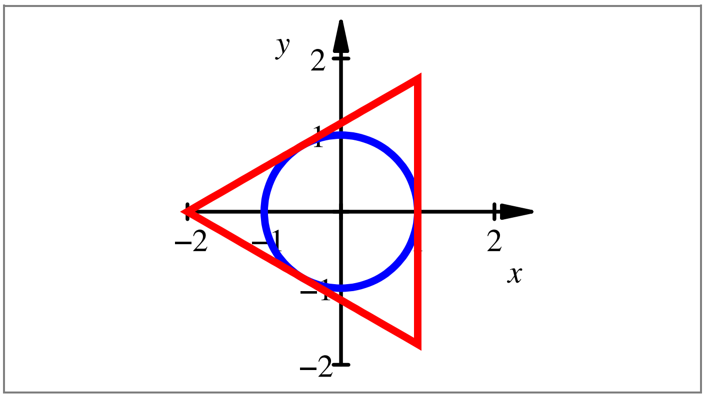
Wir haben nun drei Spitzen.

3.2 Das regelmäßige *n*-Eck

Wir verwenden diese Funktion nun als variablen „Radius" eines Kreises:

$$\vec{x}(n,t) = g(n,t)\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\left(\left(\frac{nt}{2\pi} - \mathrm{round}\left(\frac{nt}{2\pi}\right)\right)\frac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)}\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Für $n = 3$ erhalten wir:



Dreieck

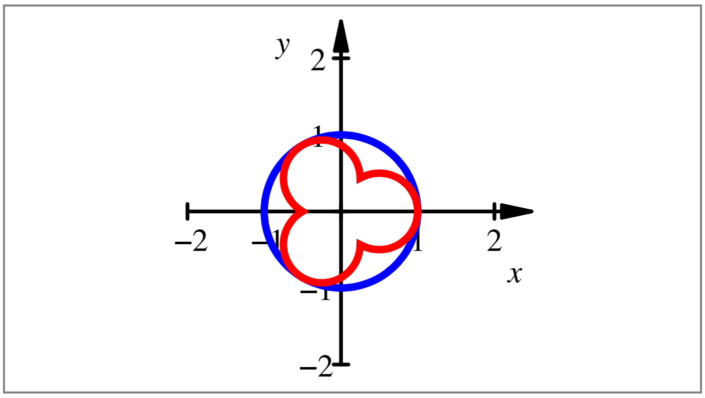
Es gibt ein gleichseitiges Dreieck mit dem Einheitskreis als Innenkreis. Allgemein erhalten wir ein regelmäßiges *n*-Eck mit dem Einheitskreis als Innenkreis.

3.3 Der regelmäßige *n*-Pass

Mit der Funktion $f(n,t)$ ergibt sich:

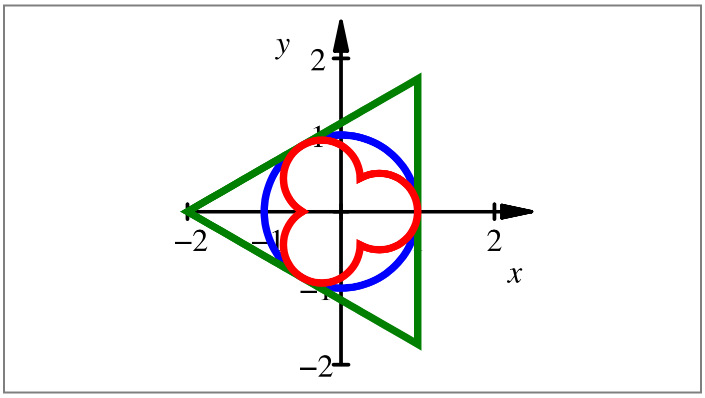
$$\vec{x}(n,t) = f(n,t)\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix} = \cos\left(\left(\tfrac{nt}{2\pi} - \operatorname{round}\left(\tfrac{nt}{2\pi}\right)\right)\tfrac{2\pi}{\mathrm{n}}\right)\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{bmatrix},\ t \in [0,2\pi]$$

Für $n = 3$ erhalten wir einen so genannten Dreipass:



Dreipass

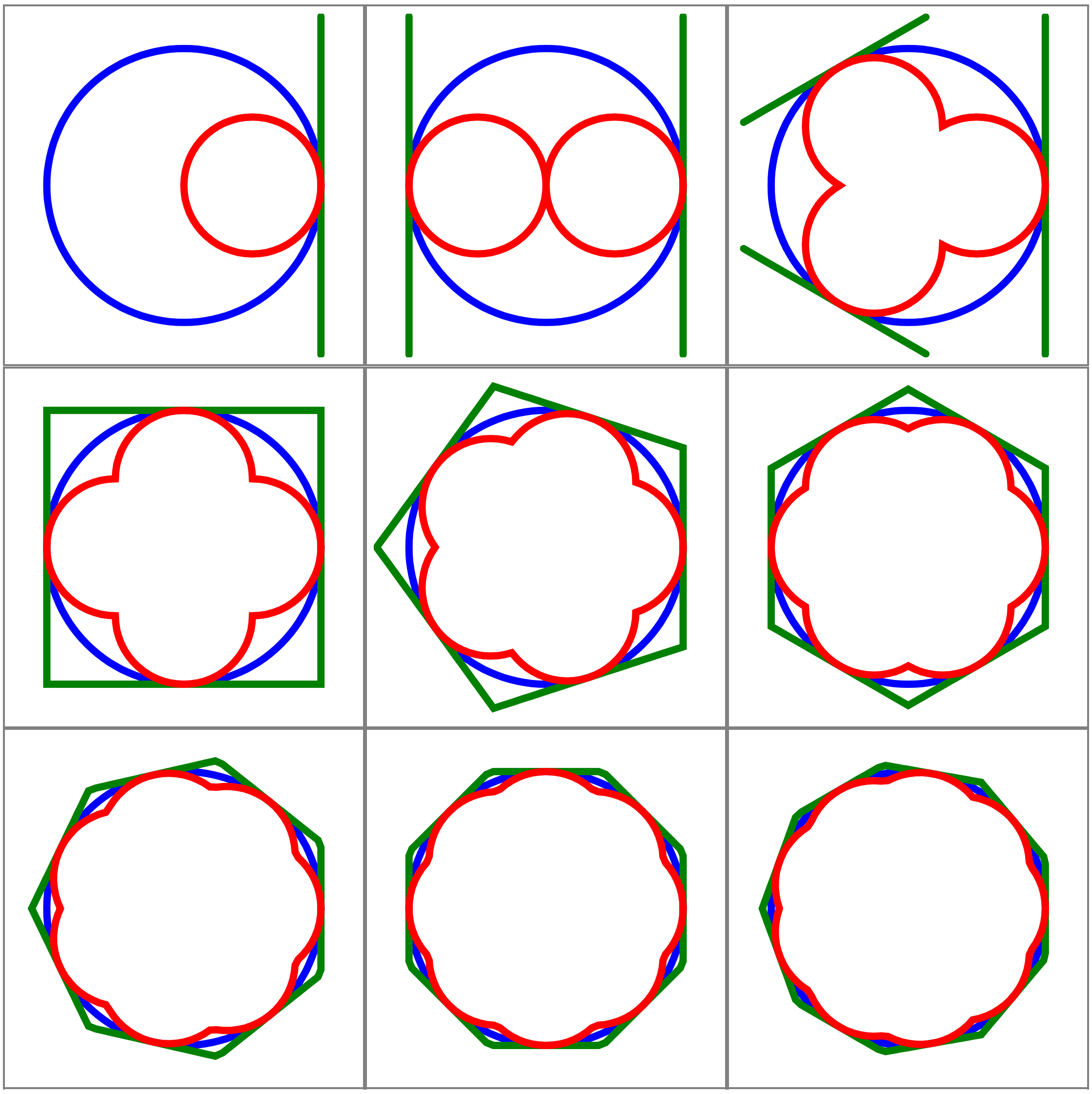
Dieser Dreipass ergibt sich aus dem Dreieck durch Spiegelung am Einheitskreis.



Kreisspiegelung

3.4 Weitere Beispiele

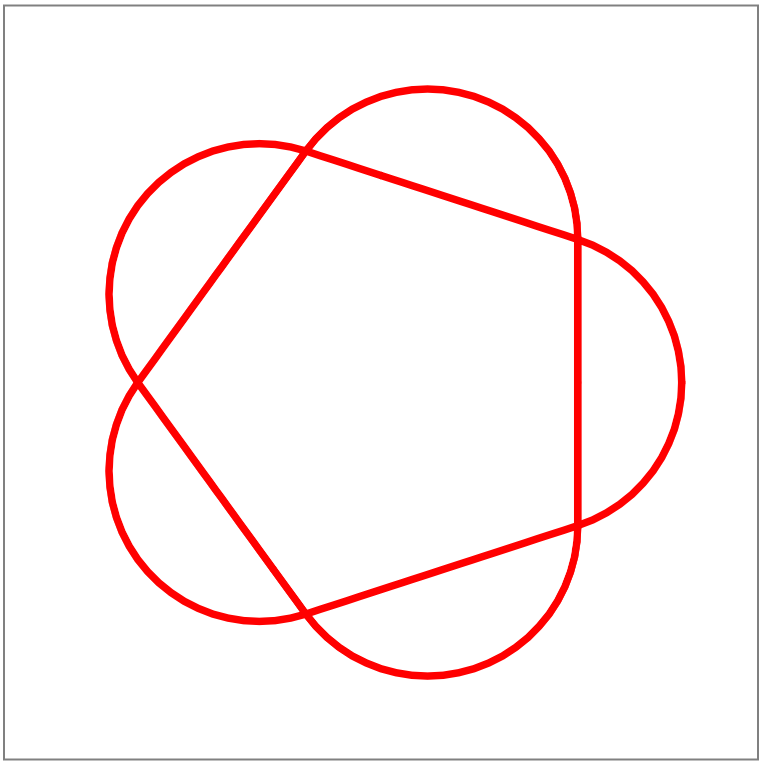
Im folgenden die Beispiele für $n = 1, 2, \ldots, 9$.



Beispiele

3.5 Einpassen

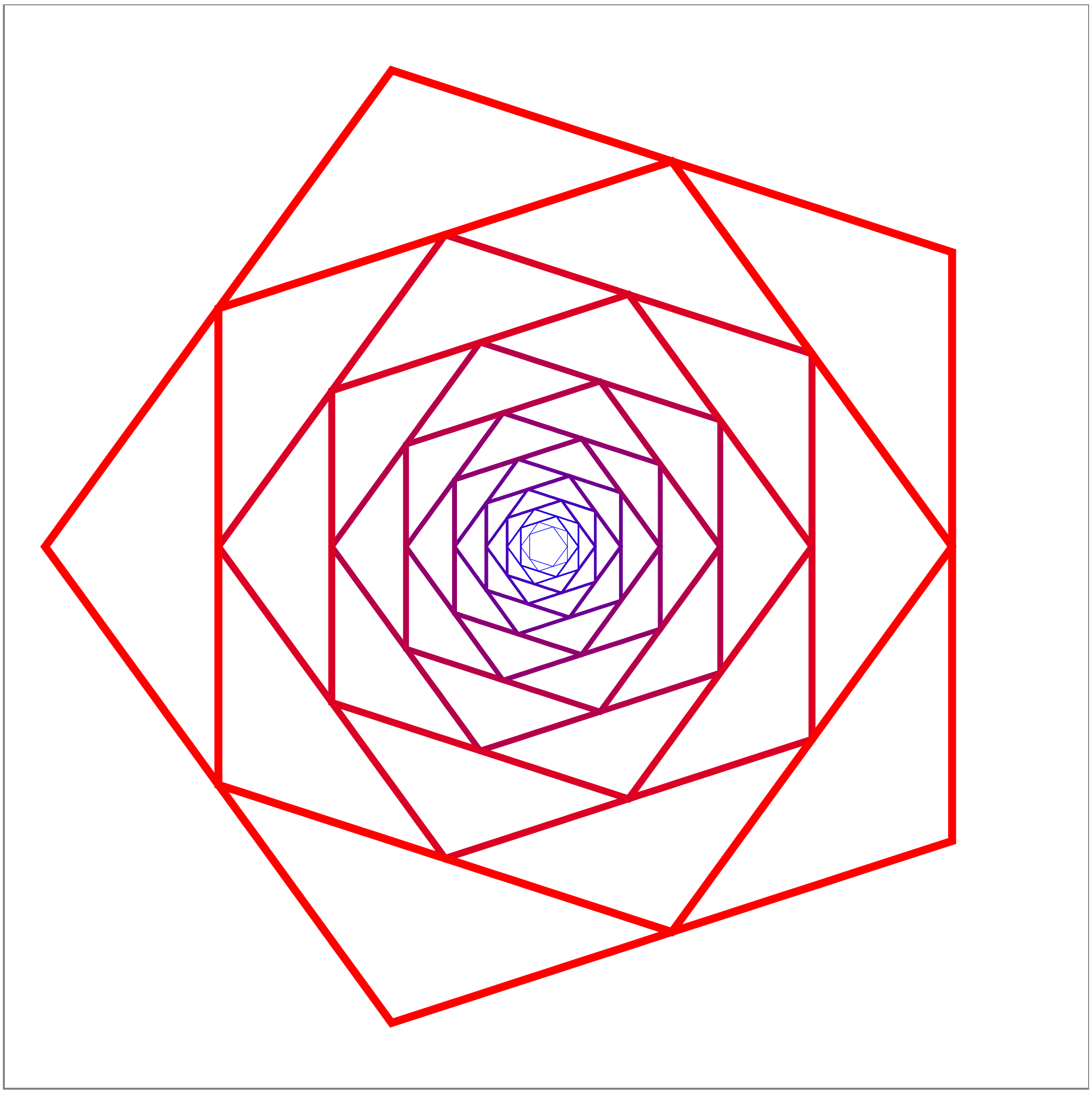
Wir können dem n-Pass ein kleineres n-Eck einpassen, der Verkleinerungsfaktor ist $\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Beispiel für $n = 5$.



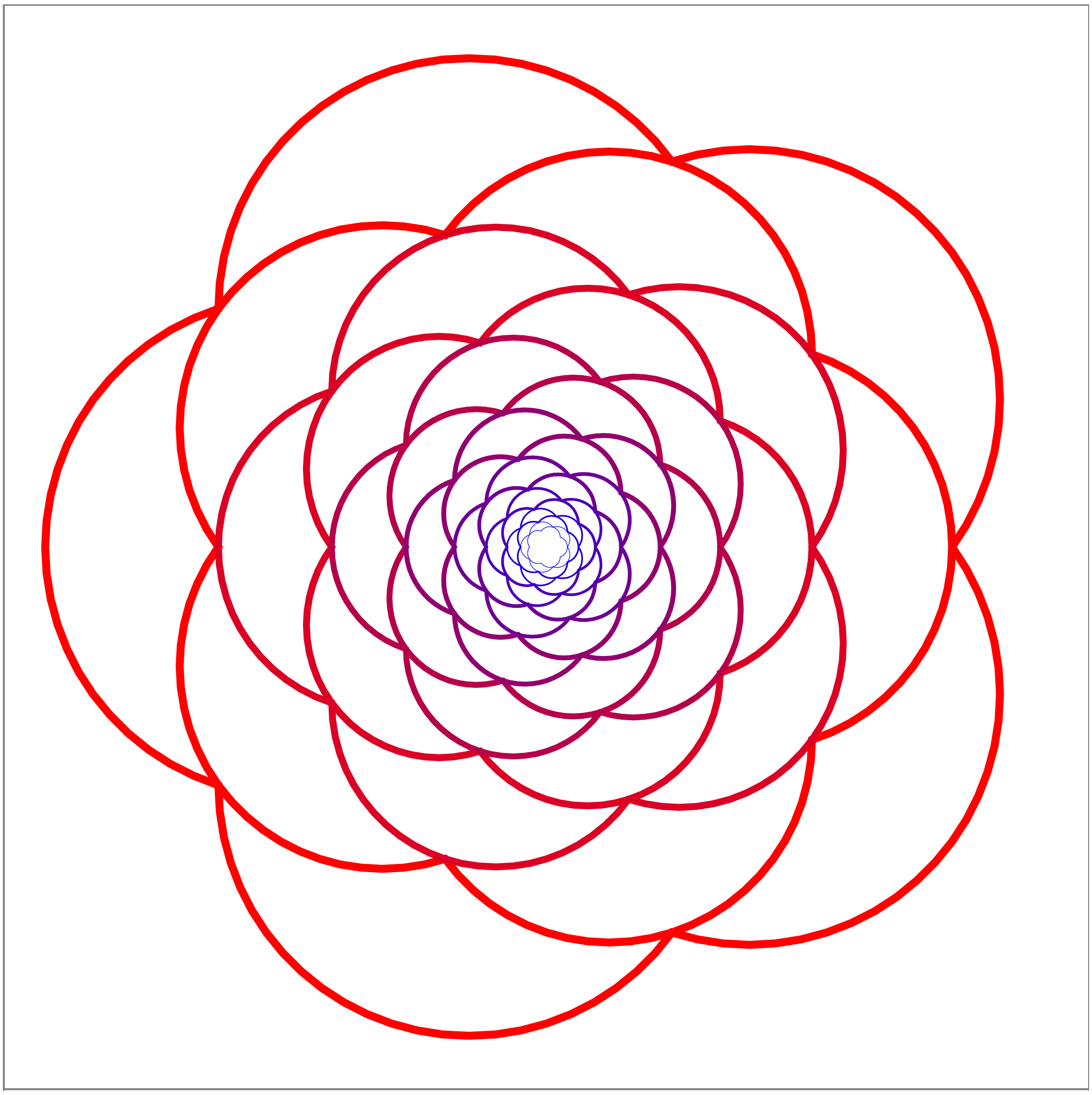
Einpassen eines kleineren Fünfeckes

4 Iteration

Wir können die Figuren iterieren. Beispiel für $n = 5$.



Iteration



Iteration