Hans Walser, [20180414]

Rhombendodekaeder

1 Worum geht es?

Konstruktion einer einparametrigen Schar von Rhombendodekaedern. Sie enthält das Rhombendodekaeder zweiter Art, aber nicht das Rhombendodekaeder erster Art.

2 Eckpunktkoordinaten

Die Abbildung 1 zeigt die Situation für den Parameterwert $p = 2$.

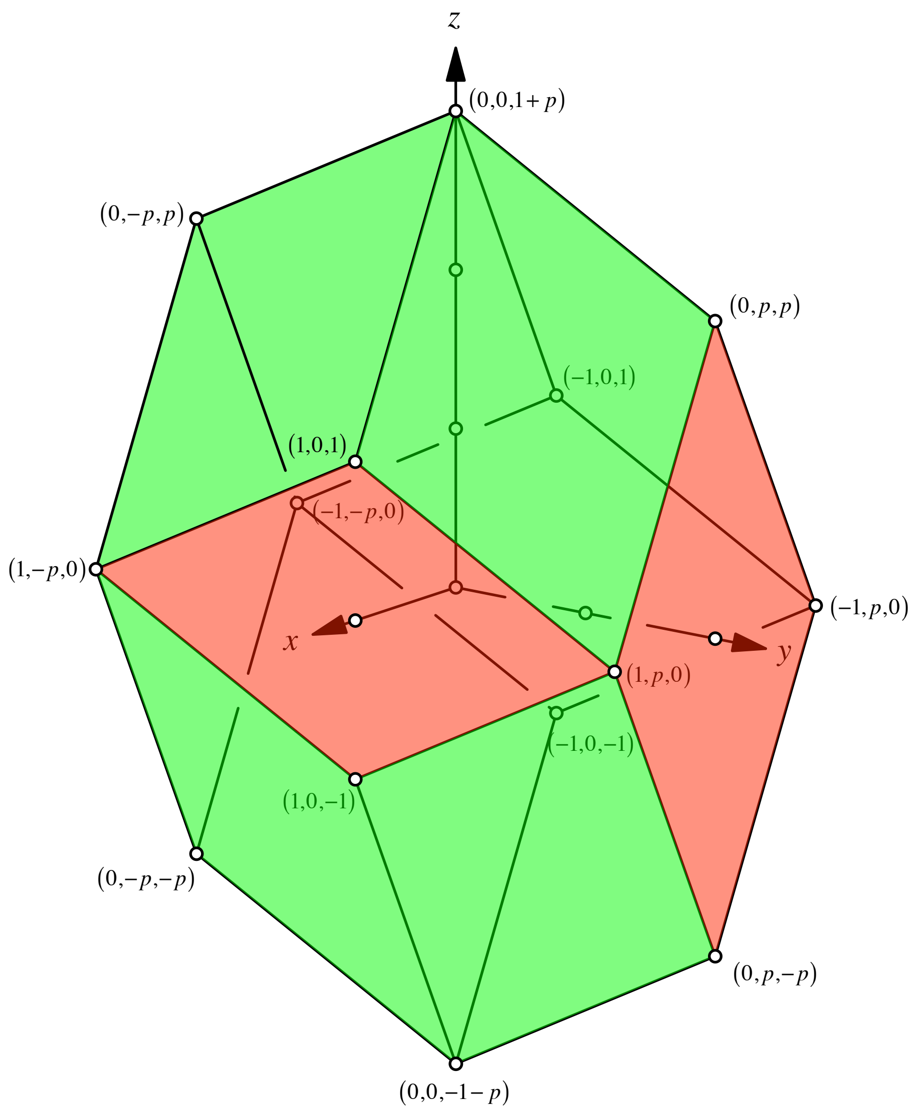


Abb. 1: Koordinaten der Eckpunkte

3 Beschreibung

Das Rhombendodekaeder enthält vier untereinander kongruente Rhomben (rot in Abb. 1 und 2a) mit dem Diagonalenverhältnis

$$p : 1 \tag{1}$$

und dem (in der Abbildung 1 spitzen) Winkel

$$\alpha_1 = 2\arctan\left(\tfrac{1}{p}\right) \tag{2}$$

Ferner enthält es acht weitere untereinander kongruente Rhomben (grün in Abb. 1 und 2a) mit dem Diagonalenverhältnis

$$\sqrt{p^2 + p + 1} : \sqrt{p^2 - p + 1} \tag{3}$$

und dem spitzen Winkel:

$$\alpha_2 = \arctan\left(\tfrac{p}{1+p^2}\right) \tag{4}$$

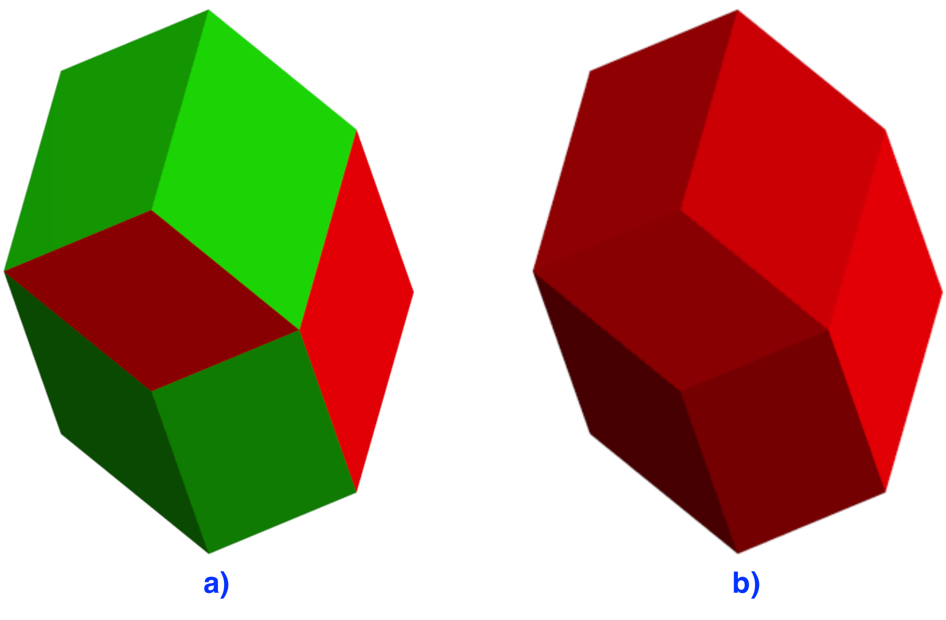


Abb. 2: Rhombendodekaeder, *p* = 2. Zweifarbig und monochrom

Die Abbildung 2b zeigt dieselbe Figur monochrom.

4 Raumfüller

Das Rhombendodekaeder ist für jedes p ein Raumfüller. Die Abbildung 3 zeigt die Situation für $p = 2$.

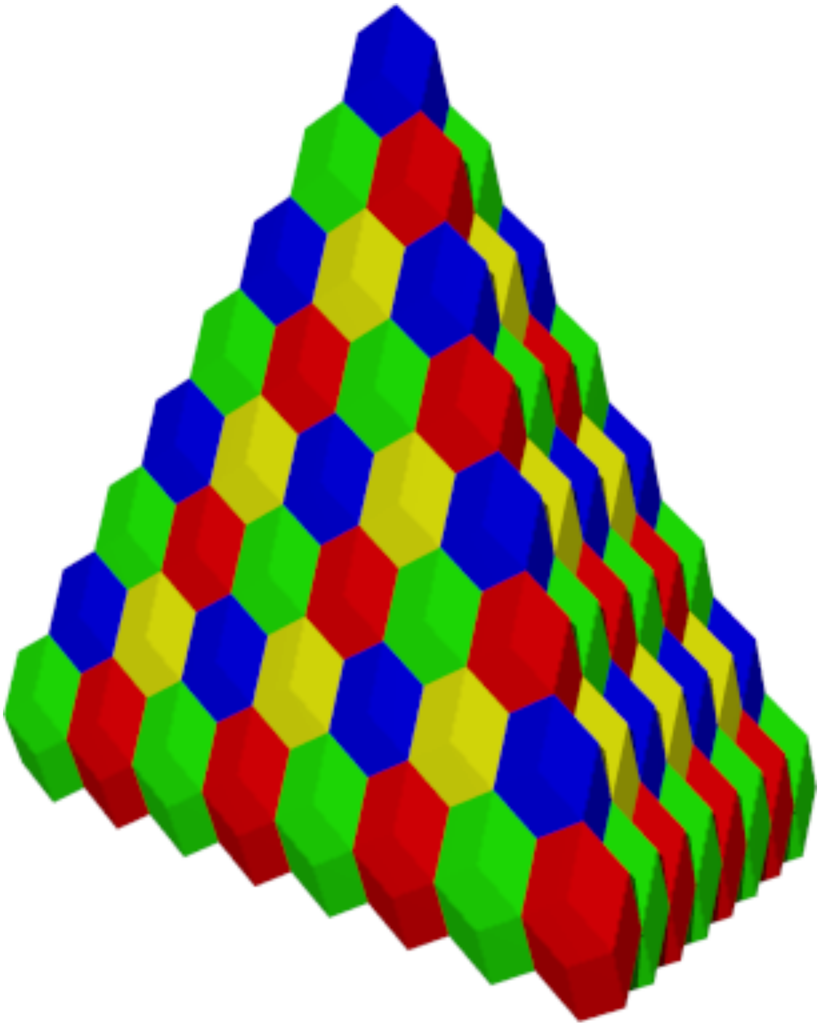


Abb. 30: Raumfüller

5 Sonderfälle

5.1 $p = 1$

Für $p = 1$ erhalten wir vier Quadrate und acht Rhomben mit einem spitzen Winkel von 60° (Abb. 4).

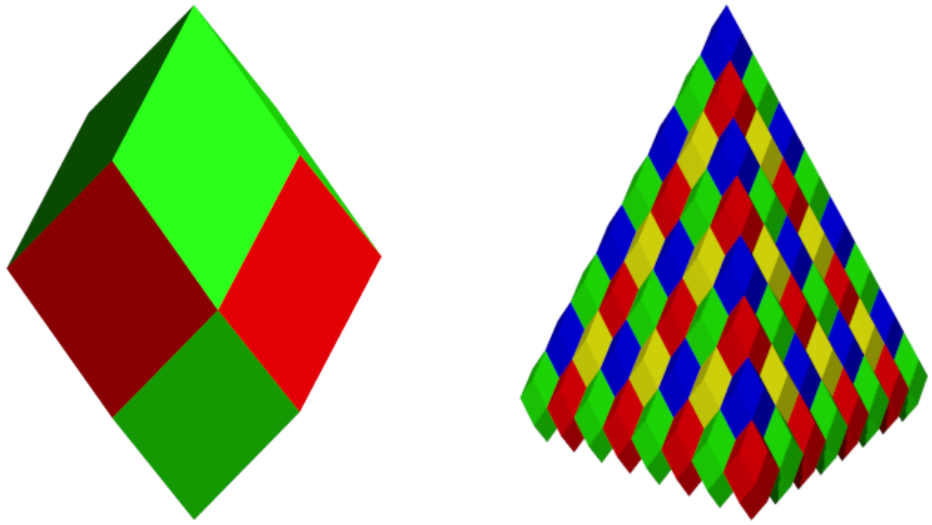


Abb. 4: *p* = 1

5.2 Goldener Schnitt

Wenn wir zwölf kongruente Rhomben haben wollen, müssen die Verhältnisse (1) und (3) übereinstimmen:

$$\frac{p}{1} = \frac{\sqrt{p^2+p+1}}{\sqrt{p^2-p+1}} \tag{5}$$

Aus (5) erhalten wir:

$$\begin{aligned} p^2\left(p^2-p+1\right) &= p^2+p+1 \\ p^4-p^3-p-1 &= 0 \\ \left(p^2+1\right)\left(p^2-p-1\right) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

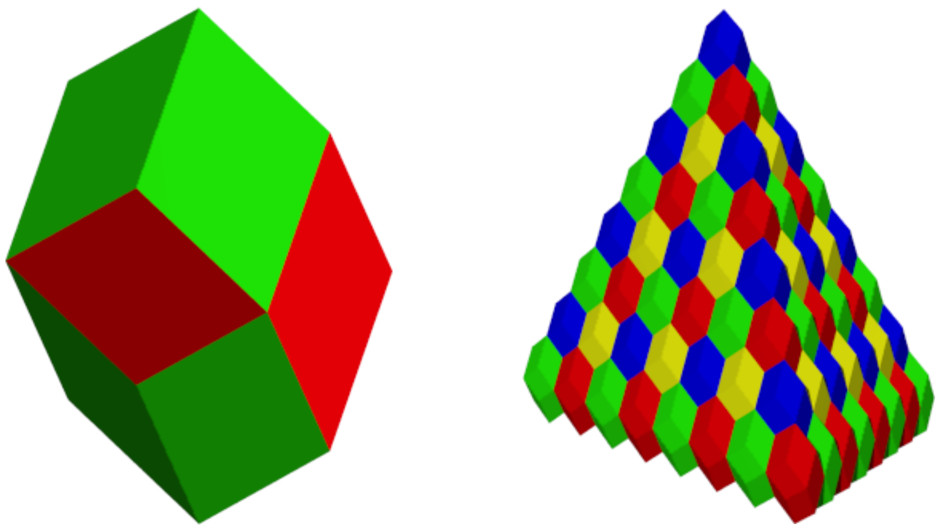
Die Gleichung (6) hat die Lösungsmenge:

$$\left\{ p_1 = \mathrm{i},\, p_2 = -\mathrm{i},\, p_3 = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2},\, p_4 = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right\} \tag{7}$$

Die positive reelle Lösung ist der Goldene Schnitt (Walser 2013):

$$p_3 = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \tag{8}$$

Das resultierende Rhombendodekaeder wird als *Rhombendodekaeder zweiter Art* bezeichnet. Es wurde von Bilinski (1960) beschrieben (Abb. 5).



a) b)

Abb. 5: Rhombendodekaeder zweiter Art

5.3 Quadratwurzel aus 2

Im Rhombendodekaeder erster Art haben wir ein Diagonalenverhältnis $\sqrt{2}:1$ (Abb. 6).

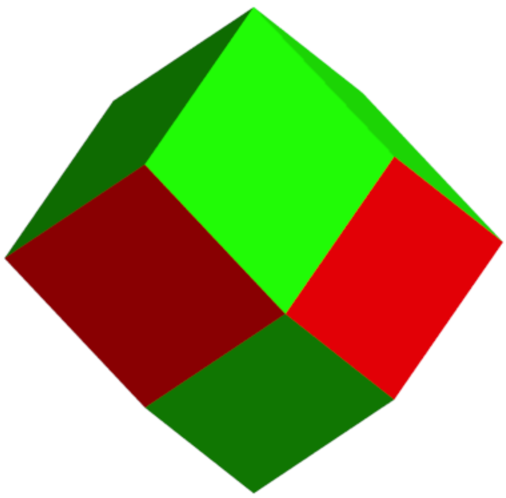
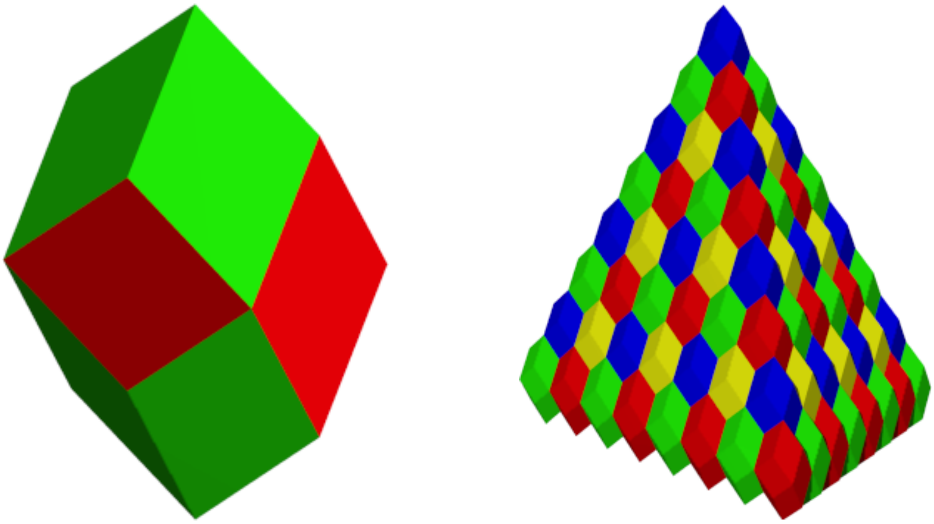


Abb. 6: Rhombendodekaeder erster Art

Beim Rhombendodekaeder erster Art sind sämtliche Rhomben kongruent. Die roten Äquatorrhomben sind alle „liegend“.

Wir setzen nun bei unserem Rhombendodekaeder $p = \sqrt{2}$ (Abb. 7). Jeder zweite Äquatorrhombus ist „stehend“. Die grünen Rhomben sind nicht kongruent zu den roten.



a) b)

Abb. 7: Quadratwurzel aus 2

Die Rhombendodekaeder der Abbildungen 6 und 7a können nicht mit einer affinen Abbildung ineinander übergeführt werden.

Literatur

Bilinski, Stanko (1960): Über Rhombenisoeder. Glasnik mat.-fiz. i astr. 15, 1960, No. 4, S. 251-262.

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.