Hans Walser, [20170723a]

Rhomben im Raster

1 Worum geht es

Wir zeichnen Rhomben im Quadratraster und im Dreiecksraster. Dabei treffen wir auch auf einen grafischen Zugang zu den Formeln der pythagoreischen Dreiecke.

2 Rhombus

Ein Rhombus kann verschieden charakterisiert werden.

In der Regel wird eine der drei folgenden charakterisierenden Eigenschaften als Definition verwendet. Die beiden anderen Eigenschaften müssen dann als Theorem bewiesen werden.

2.1 Diagonaleneigenschaft

Viereck mit orthogonalen sich halbierenden Diagonalen.

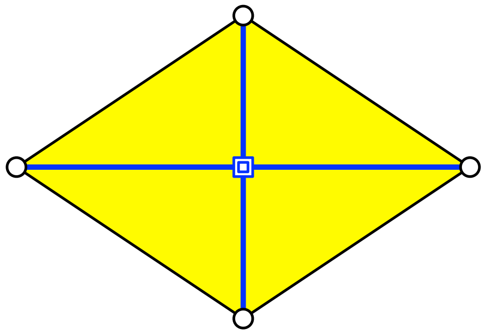


Abb. 1: Diagonalen

Parameter: Die beiden Diagonalenlängen

Modell: Heidelberger Kreuz

2.2 Seiteneigenschaft

Viereck mit vier gleich langen Seiten (Abb. 2).

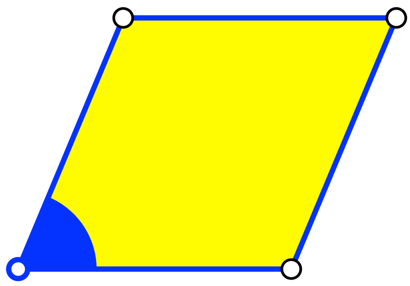


Abb. 2: Seite und Winkel

Parameter: Seitenlänge, spitzer Innenwinkel

Gelenkmodell

2.3 Streifen

Durchschnitt zweier gleich breiter Streifen (Abb. 3).

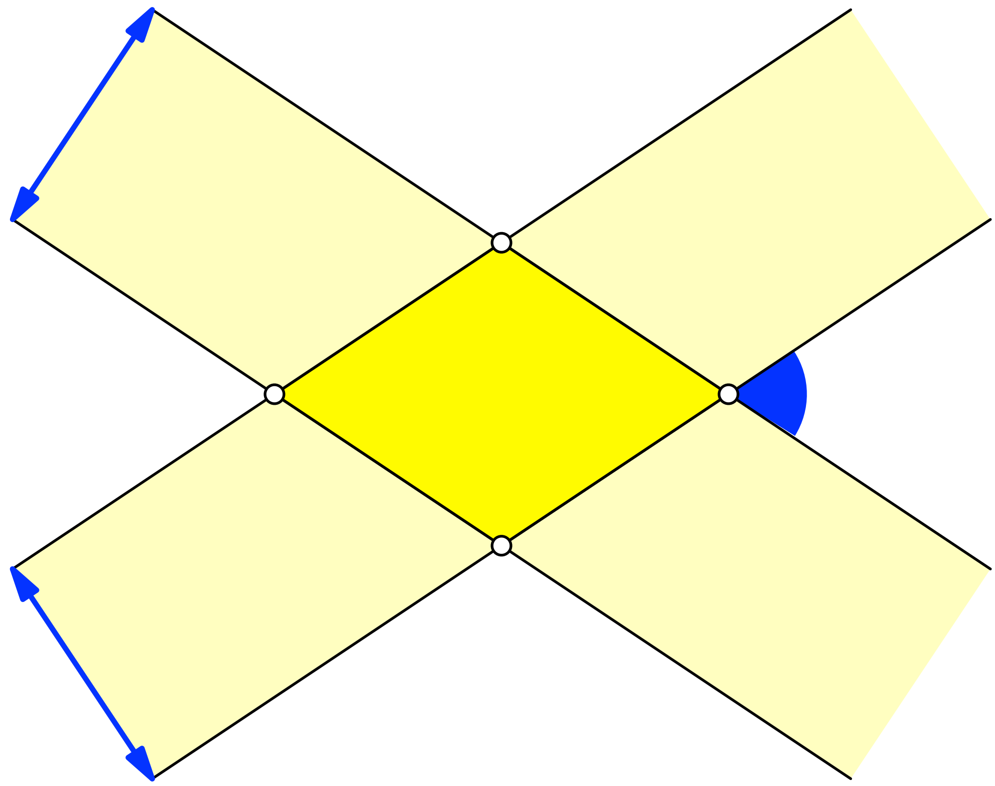


Abb. 3: Zwei Streifen

Parameter: Streifenbreite, spitzer Winkel der Streifen

3 Im Quadratraster

Im Quadratraster (Karoraster) können Rhomben auf verschiedene Weisen eingezeichnet werden.

Die Abbildung 4 orientiert sich an der Diagonaleneigenschaft. Die Diagonalen sind Rasterlinien.

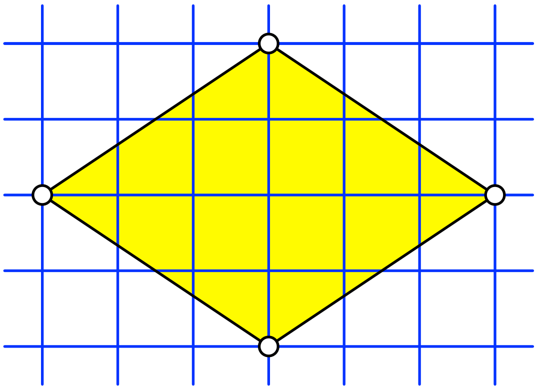


Abb. 4: Diagonaleneigenschaft im Raster

Die Abbildung 5 orientiert sich ebenfalls an der Diagonaleneigenschaft. Die Diagonalen liegen auf schrägen Symmetrieachsen des Rasters.

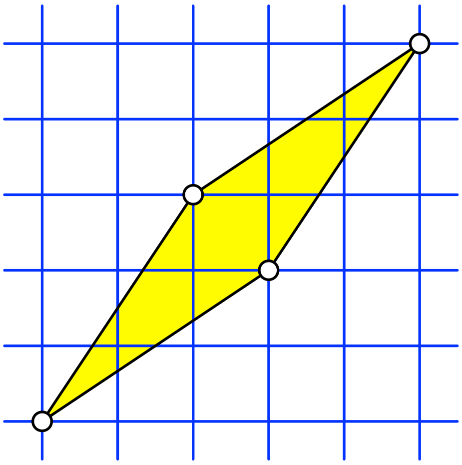


Abb. 5: Diagonalen auf schrägen Symmetrieachsen

Die Abbildung 6a operiert ebenfalls mit der Diagonaleneigenschaft.

Wir können aber auch mit Pythagoras rechnen und die Seiteneigenschaft verwenden (Abb. 6b).

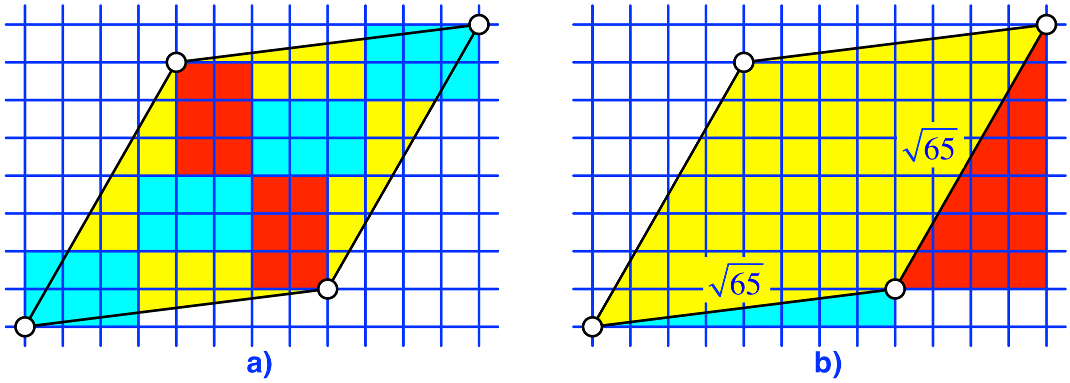


Abb. 6: Diagonaleneigenschaft. Seiteneigenschaft

Die Abbildung 7 zeigt ein zweites Beispiel dieser Art.

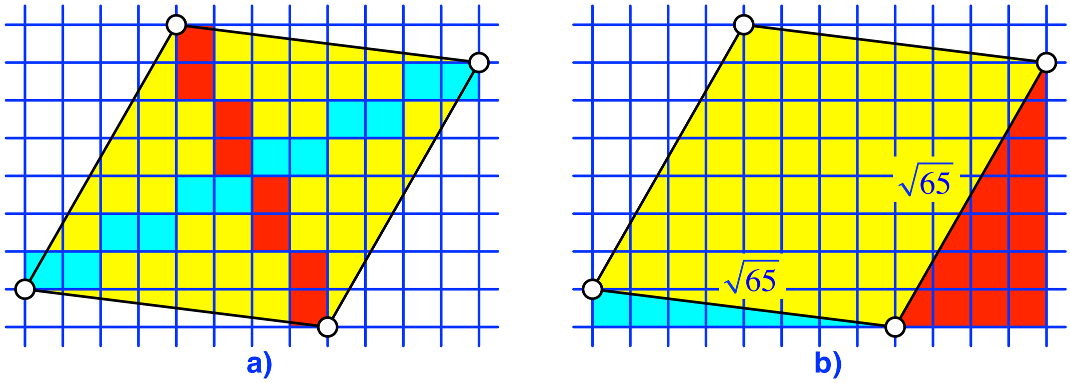


Abb. 7: Weiteres Beispiel

Die Abbildung 8 zeigt noch ein Beispiel.

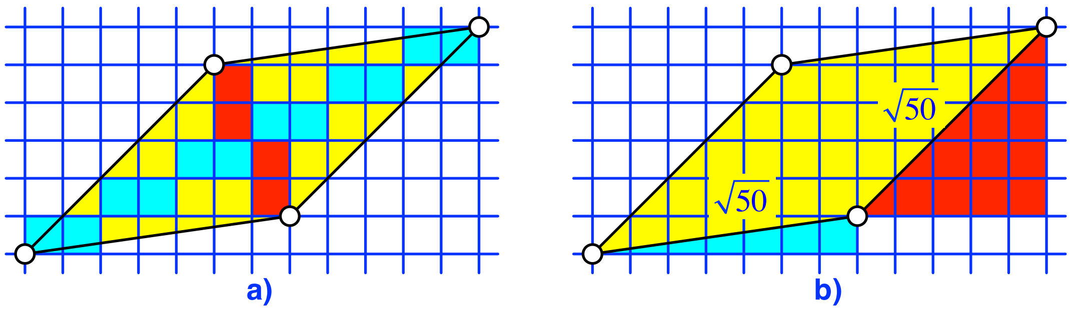


Abb. 8: Noch ein Beispiel

4 Pythagoreische Rhomben

In der Abbildung 9 wind zwei gegenüberliegende Rhombenseiten auf Rasterlinien. Entsprechend verschwindet in der Abbildung 9b das hellblaue rechtwinklige Dreieck. Das rote rechtwinklige Dreieck hat die Katheten 3 und 4 (Lehrerdreieck, pythagoreisches Dreieck).

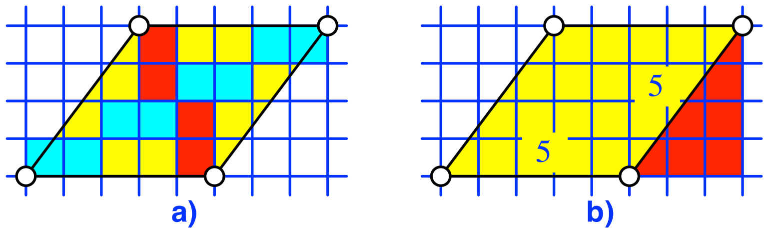


Abb. 9: Pythagoreische Rhombus

Rhomben dieser Art nennen wir *pythagoreische Rhomben*.

Die Abbildung 10 zeigt das nächste Beispiel. Das pythagoreische Dreieck hat die Katheten 5 und 12.

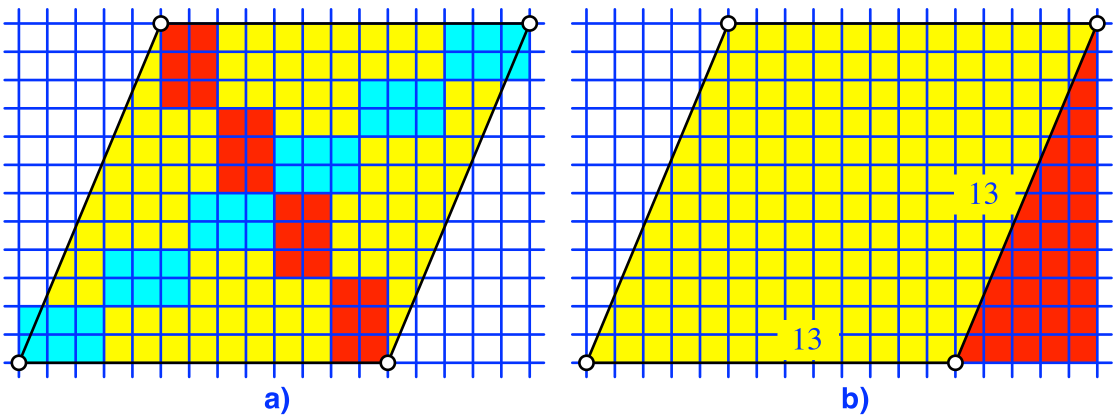


Abb. 10: Nächstes Beispiel

Wir sehen, wie der Hase läuft.

Wir wählen zwei natürliche Zahlen $0 < v < u$ und bilden damit einerseits Rechtecke im Querformat (hellblau) und im Hochformat (rot).

Von einem Rasterpunkt aus bilden wir mit je u hellblauen Rechtecken eine gemächliche Treppe nach rechts oben beziehungsweise nach links unten. Weiter bilden wir mit je v roten Rechtecken eine steile Treppe nach links oben beziehungsweis nach rechts unten.

Wegen $uv = vu$ überwinden die blaue und die rote Treppe dieselbe Höhendifferenz $2uv$. Wir erhalten also einen Rhombus mit zwei Rasterlinien als Seiten. Die schrägen Rhombenseiten haben ein pythagoreisches Dreieck als Stützdreieck.

Die horizontale Rhombenseite ist $uu+vv=u^2+v^2$. Das ist dann auch die Hypotenusenlänge des pythagoreischen Dreieckes. Die gesamte Treppenhöhe ist $2uv$. Dies ist die Höhe des Rhombus und damit auch die senkrechte Kathete des pythagoreischen Dreieckes. Der „Überhang" des Rhombus ist $uu-vv=u^2-v^2$. Dies ist die kurze Kathete des pythagoreischen Dreieckes.

Wir haben also die bekannten Formeln (in Standardschreibweise) neu gefunden:

$$a=u^2-v^2, \quad b=2uv, \quad c=u^2+v^2 \tag{1}$$

5 Im Dreiecksraster

Die Diagonaleneigenschaft des Rhombus lässt sich im Dreiecksraster weniger gut einsetzen. Gleichwohl gibt es triviale Lösungen (Abb. 11).

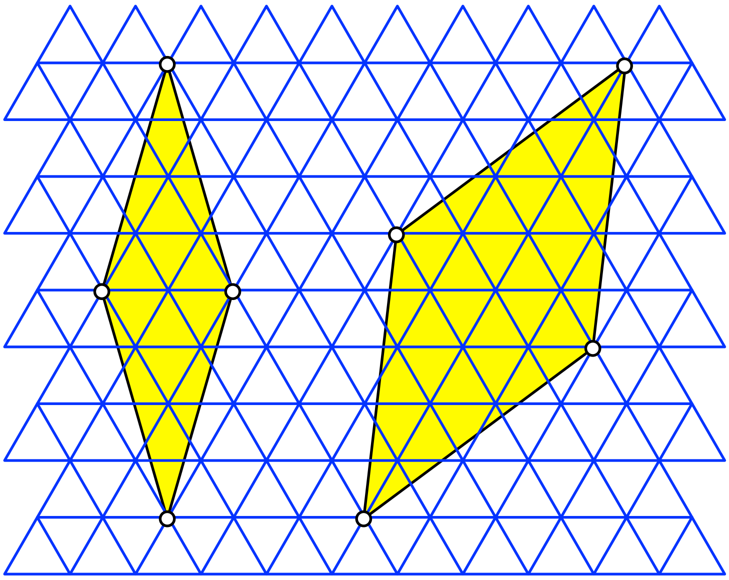
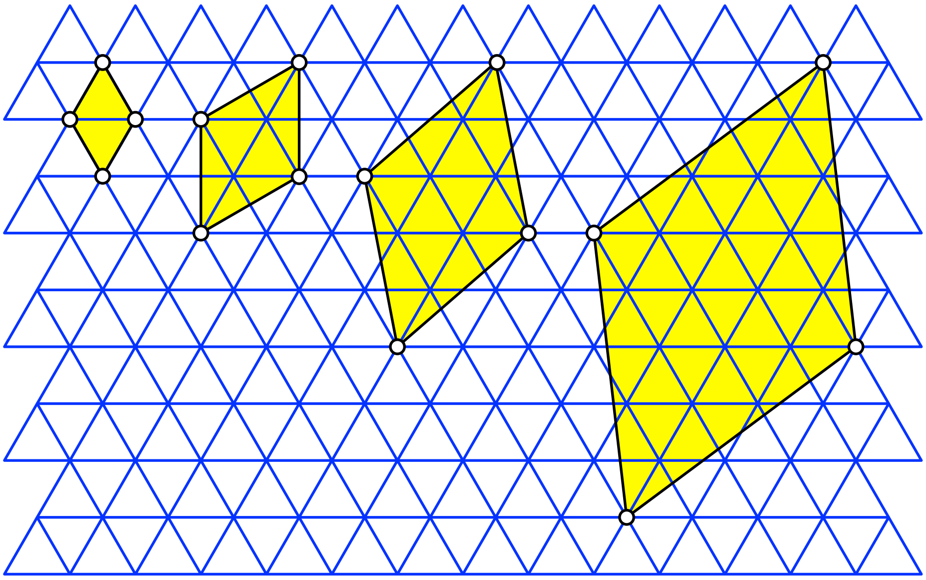


Abb. 11: Triviale Lösungen

Für den Sonderfall eines spitzen Winkels von 60° gibt es ebenfalls viele Lösungen (Abb. 12).



Ab. 12: Spitzer Winkel 60°

Die Abbildung 13 zeigt ein „pythagoreisches“ Bespiel.

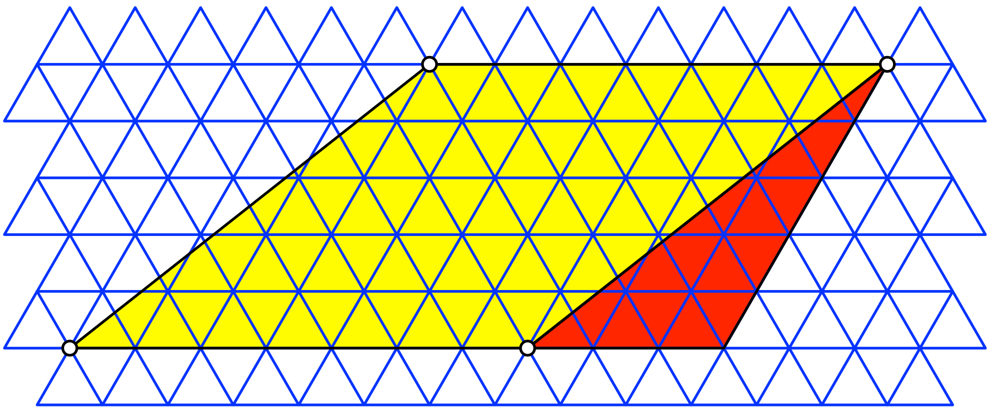


Abb. 13: „Pythagoreisches“ Beispiel

Das rote Dreieck hat die kurzen Seiten 3 und 5 und den stumpfen Winkel 120°. Für die längste Seite liefert der Kosinussatz die Länge 7.

Es ist also ein „pythagoreisches“ 120°-Dreieck.

Die Abbildung 14 zeigt ein zweites Beispiel dieser Art. Die Seiteneigenschaft kann wiederum mit dem Kosinussatz nachgewiesen werden.

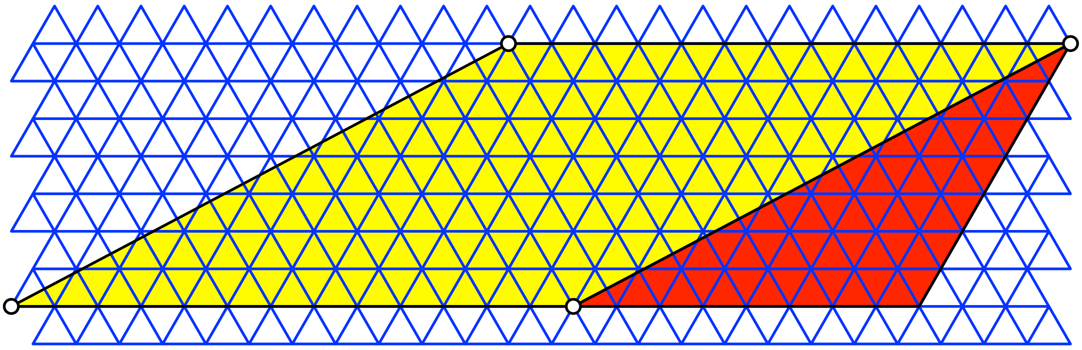


Abb. 14: Pythagoreischer Rhombus

Es ist mir nicht gelungen, die zu (1) analogen Formeln visuell zu zeigen.
Die zu (1) analogen Formeln lauten:

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv + v^2, \quad c = u^2 + v^2 + uv \tag{2}$$

Der Nachweis von (2) geschieht mit dem Kosinussatz.
Im Beispiel der Abbildung 13 ist $u = 2$ und $v = 1$.
Im Beispiel der Abbildung 14 ist $u = 3$ und $v = 1$.