Hans Walser, [20160106]

Reuleaux-Zweieck

Anregung: Renato Pandi

1 Worum geht es?

Es wird ein Beweis mit wenigen Worten und viel Bildern vorgestellt für den Sachverhalt, dass ein Zweieck mit 120°-Winkeln in jeder Lage in ein gleichseitiges Dreieck passt.

2 Das Zweieck

Die Abbildung 1 zeigt ein Zweieck mit 120°-Winkeln. Es ist aus zwei gestutzten Reuleaux-Dreiecken zusammengesetzt.

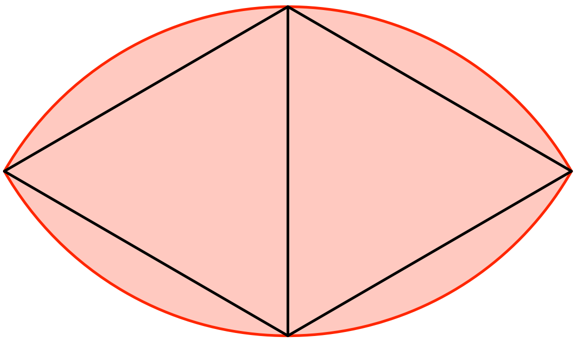

Abb. 1: Reuleaux-Zweieck mit 120°-Winkeln

Die Abbildung 2 zeigt das Zweieck in einer speziellen und einer allgemeinen Lage im Dreieck.

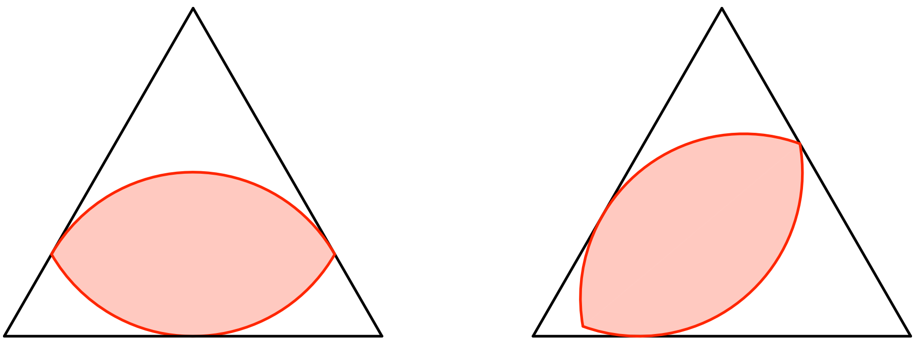

Abb. 2: Einpass-Eigenschaft

3 Beweis der Einpass-Eigenschaft

Wir beginnen mit dem Zweieck in der speziellen Lage (Abbildung 2 links).

Eine der fundamentalen Ideen in der Mathematik besteht darin, ein Problem in ein übergeordnetes einzubinden, darin die Lösung sofort sichtbar wird. Daher binden wir das Dreieck mit dem Zweieck in spezieller Lage in ein regelmäßiges Sechseck ein gemäß Abbildung 3. Jedes Zweieck liegt in seinem Dreieck.

Zusätzlich sind die relativ zum Sechseck jeweils innersten Punkte auf dem Innenrand der Zweieck blau markiert. Weiter ist ein lila Rhombus eingezeichnet. Dieser Rhombus wird im Folgenden eine Schlüsselrolle spielen.

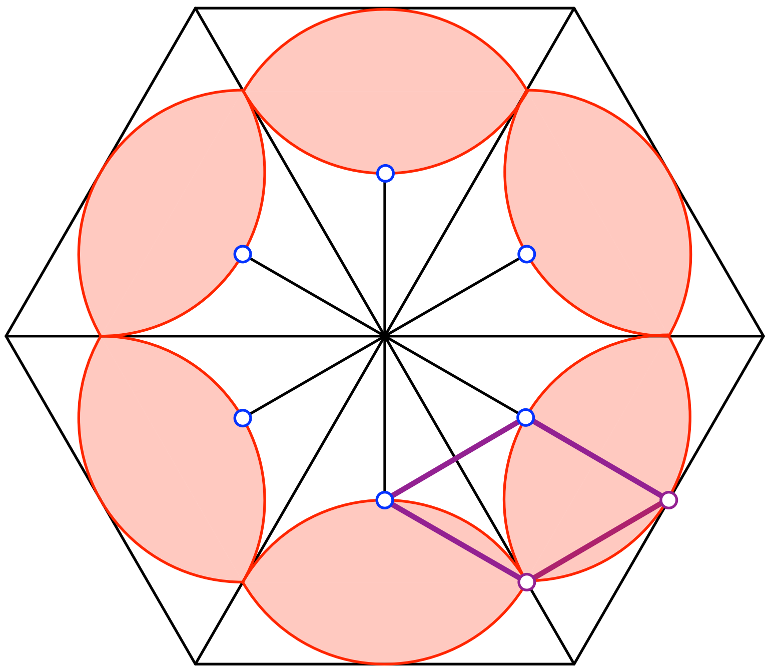

Abb. 3: Im regelmäßigen Sechseck

Nun drehen die Zweiecke je um den blauen Punkt um einen beliebigen Winkel (Abbildung 4, es wurde um den Winkel 40° gedreht).

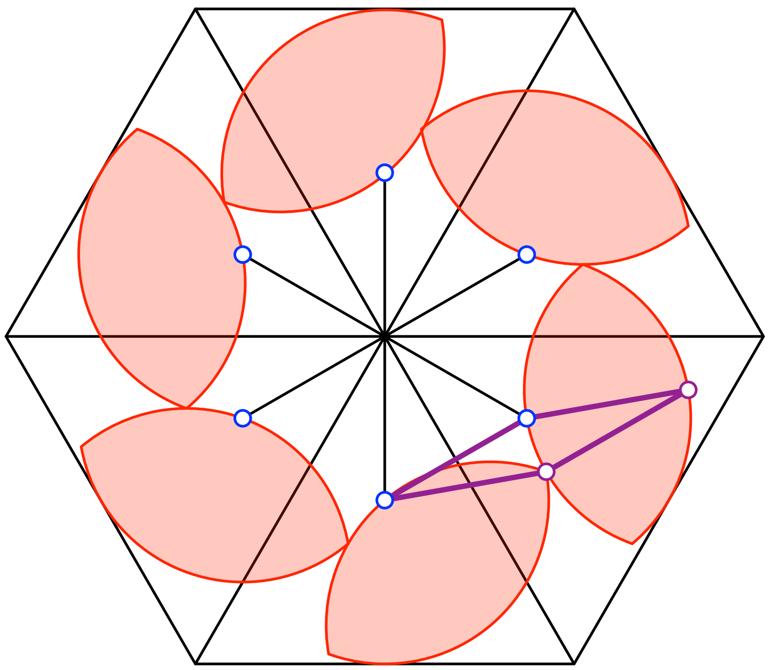

Abb. 4: Gedrehte Zweiecke

Die gedrehten Zweiecke ragen aus dem eigenen Dreieck heraus ins Nachbardreieck. Es zeigt sich aber, dass jedes Zweieck die beiden benachbarten Zweiecke berührt. Die Berührungseigenschaft ergibt sich unmittelbar aus dem verformten lila Rhombus.

Weiter können wir nun kleine gleichseitige Abstandsdreiecke einpassen. In der Abbildung 5 sind diese blau markiert.

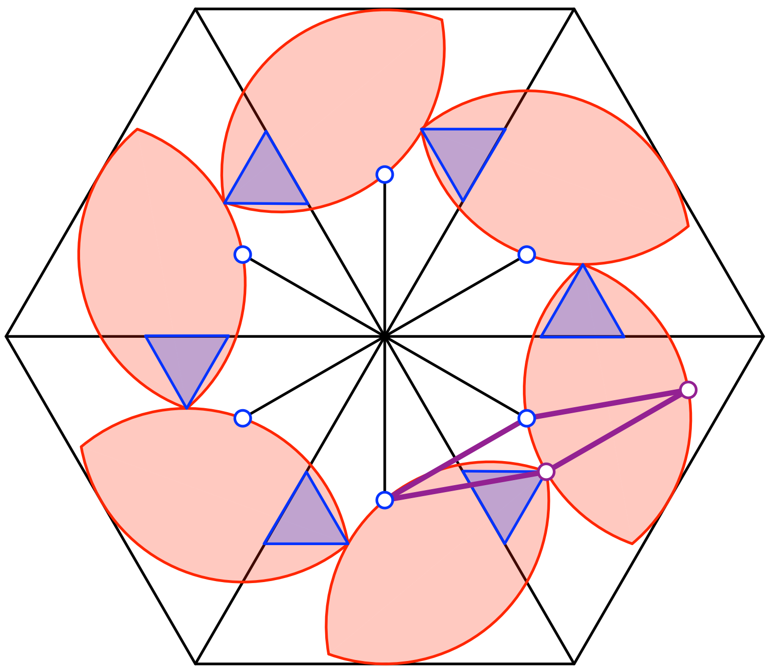

Abb. 5: Blaue Abstandsdreiecke

Nun verschieben wir jedes Zweieck rückwärts um die Seitenlänge des Abstandsdreieckes parallel zur berührten Sechseckseite (Abb. 6).

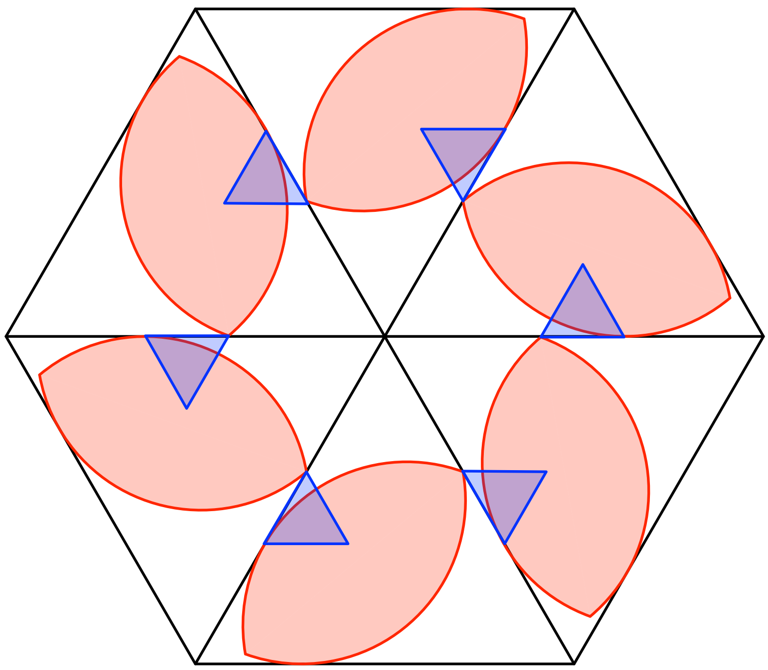

Abb. 6: Zurückschieben der Zweiecke

Damit kehrt jedes Zweieck in sein eigenes Dreieck zurück und berührt dessen drei Seiten (Abb. 7).

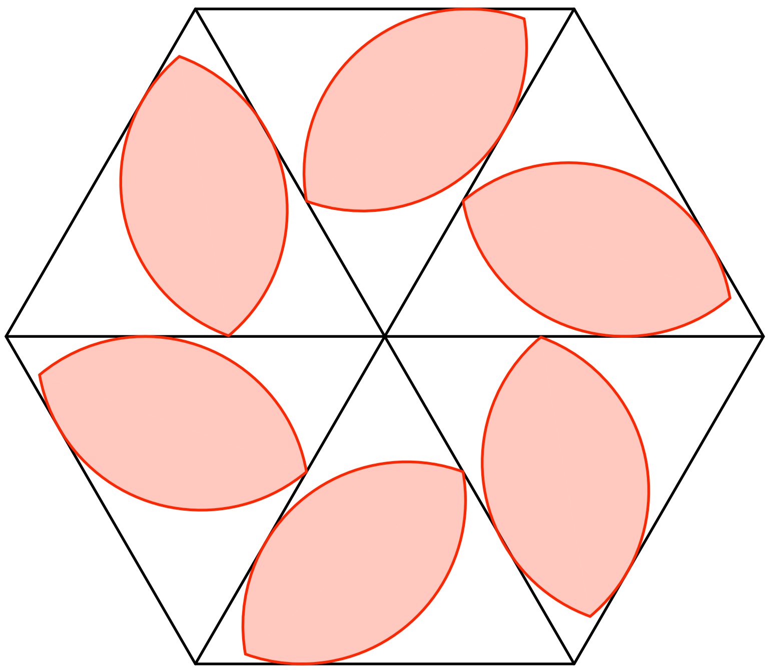

Abb. 7: At home

Wir haben nun die Situation in allgemeiner Lage.

Literatur

Reuleaux, F. (1875): Lehrbuch der Kinematik. Erster Band: Theoretische Kinematik. Braunschweig: Vieweg.
e-Version:
https://ia700409.us.archive.org/29/items/lehrbuchderkine01reulgoog/lehrbuchderkine01reulgoog.pdf