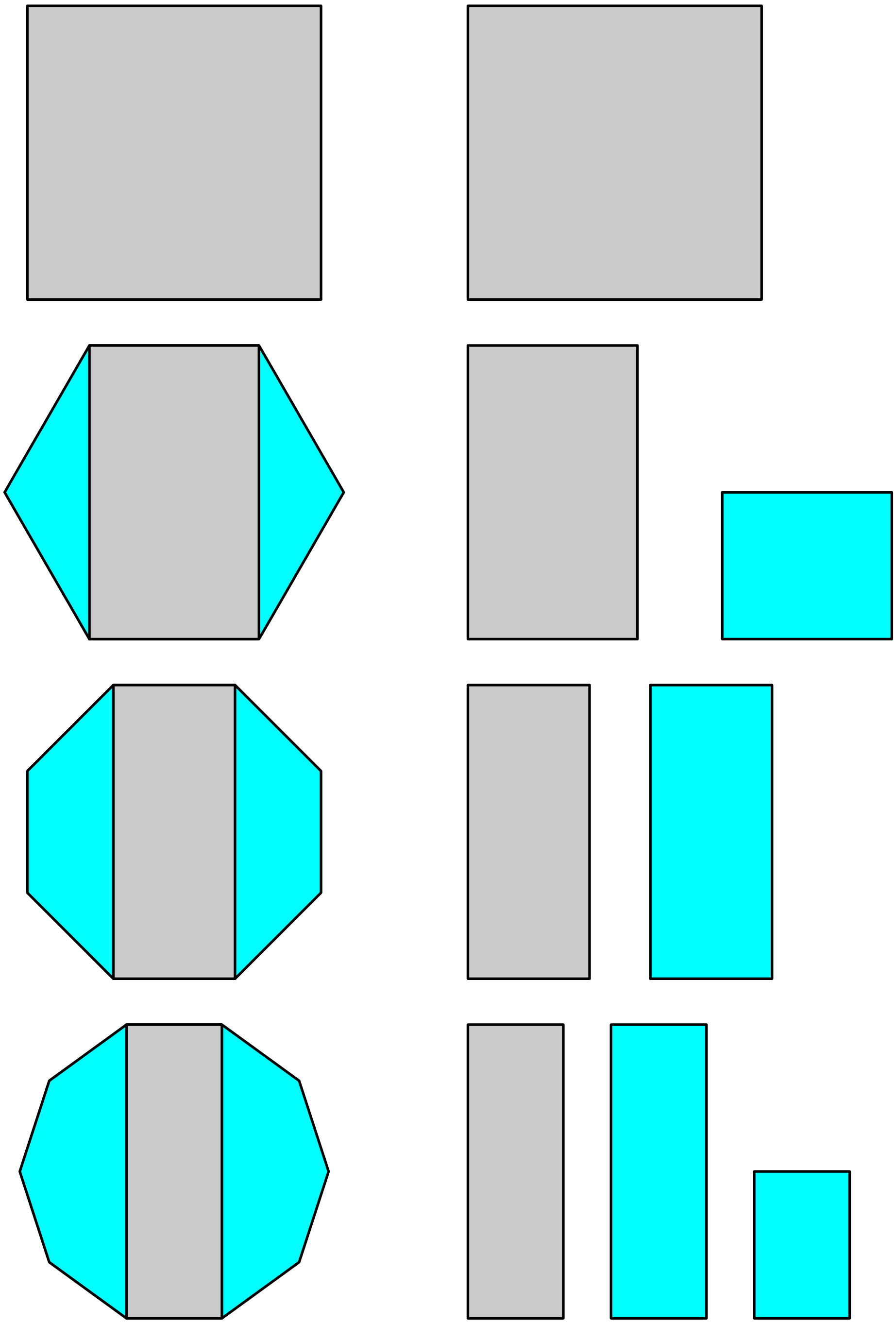
Hans Walser, [20140417]

Reguläre Polygone gerader Eckenzahl

1 Flächengleichheiten

Bei regulären Polygonen gerader Eckenzahl gelten die in der Abbildung 1 angedeuteten Flächenbeziehungen.



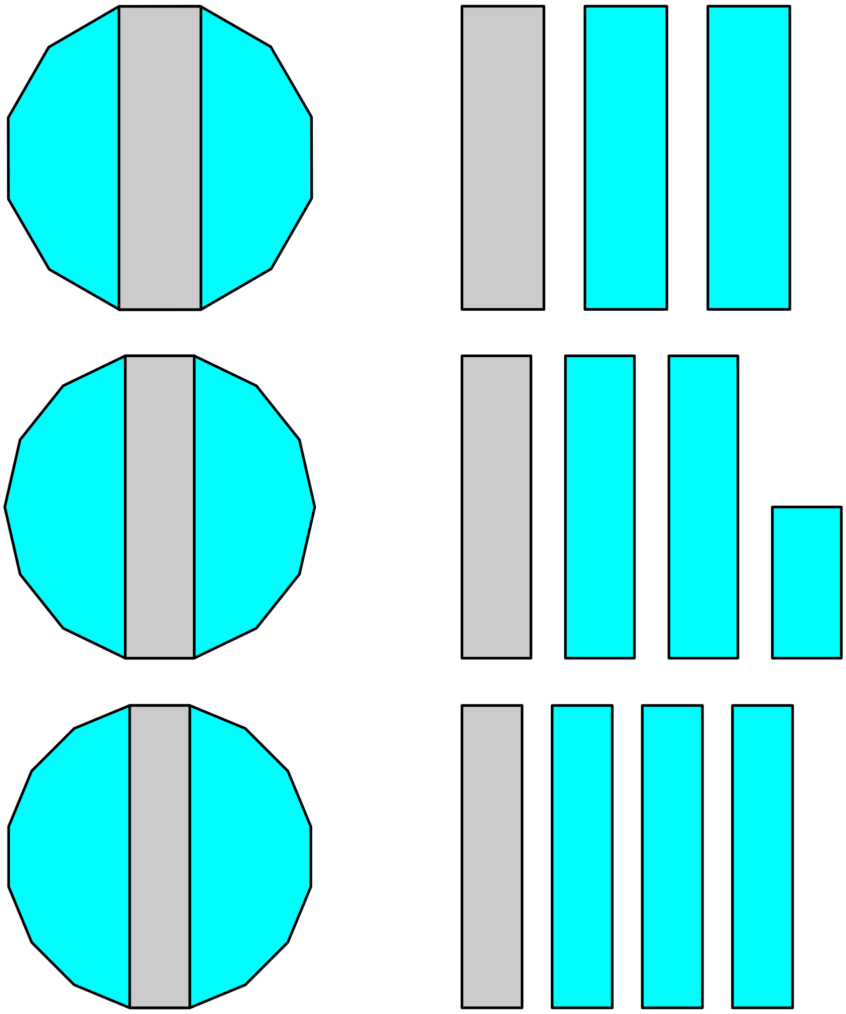


Abb. 1: Flächenbeziehungen

Diese Beziehungen lassen sich durch Nachrechnen verifizieren. Für ein $2m$-Eck erhalten wir einerseits den gesamten Flächeninhalt

$$A_{2m\text{-Eck}} = 2m\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)$$

und andererseits für das Rechteck den Flächeninhalt

$$A_{\text{Rechteck}} = 4\cos\left(\frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right).$$

Somit ergibt sich das Flächenverhältnis

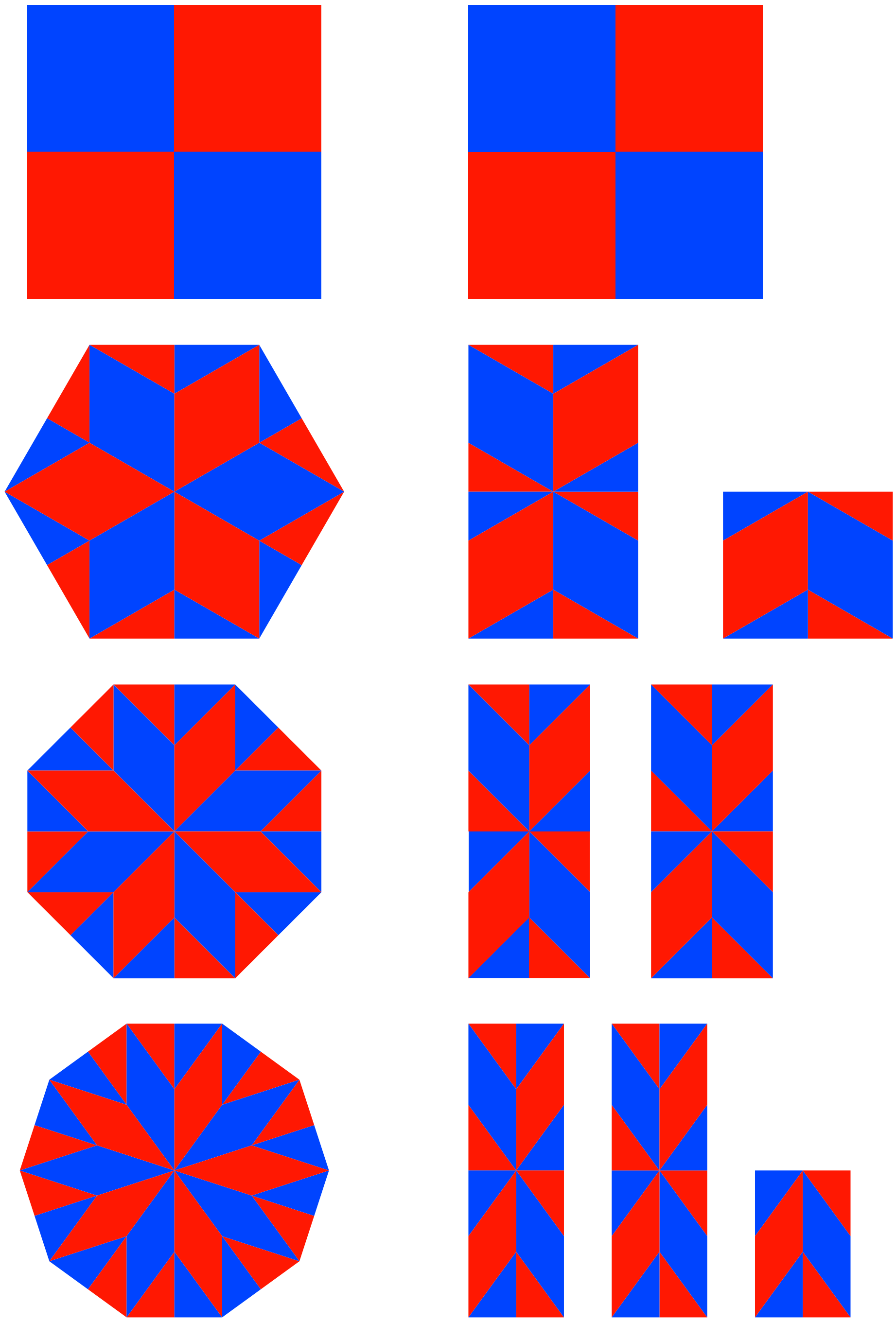
$$\frac{A_{2m\text{-Eck}}}{A_{\text{Rechteck}}} = \frac{m}{2}.$$

Wenn m eine gerade Zahl ist, also die Eckenzahl des Polygons eine Viererzahl, geht es auf.

Falls m eine ungerade Zahl ist, ergibt sich ein halbzahliges Verhältnis. Die Eckenzahl des Polygons ist dann 6, 10, 14, ... Euler (1782) bezeichnete diese Zahlen als *nombres impairement pairs*. Diese etwas merkwürdige Formulierung wurde von meinen Studierenden etwa so interpretiert: Diese Zahlen setzen sich aus einer ungeraden Anzahl von Paaren zusammen. Sie besetzen in der Liste der geraden Zahlen die ungeraden Positionen. Sie sind die Summe von zwei ungeraden Zahlen.

2 Zerlegungsbeweise

Die Abbildung 2 zeigt einheitliche Zerlegungsbeweise.



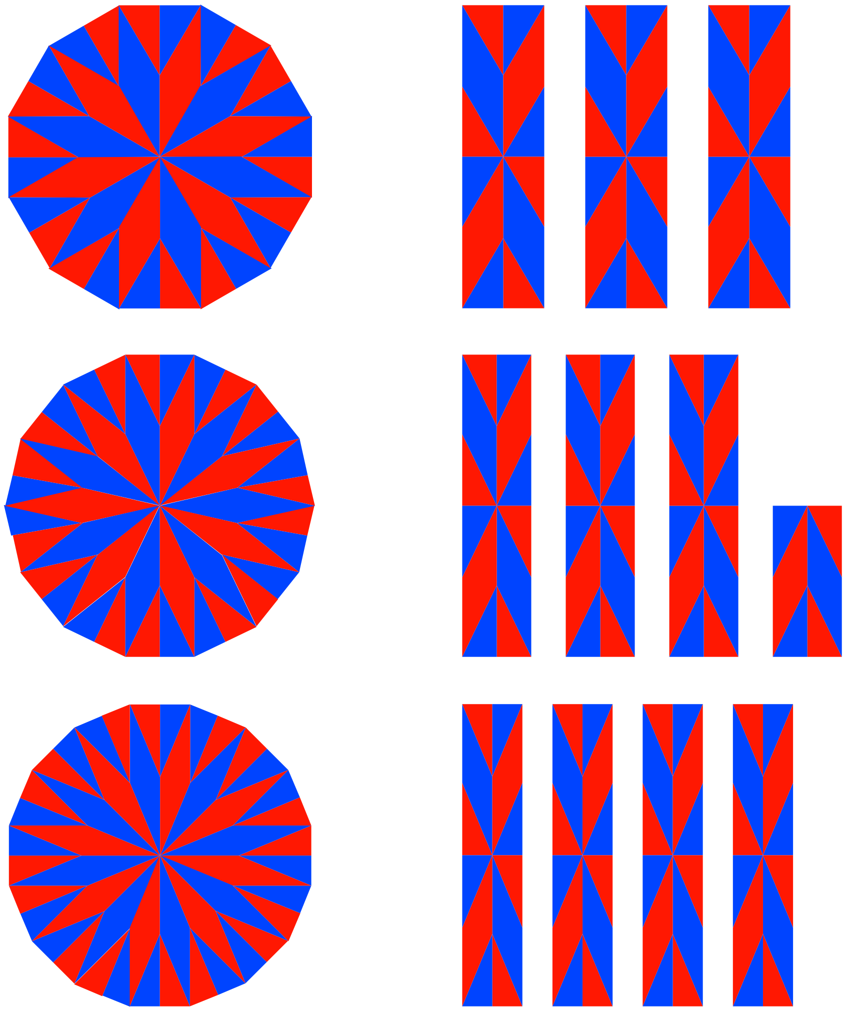
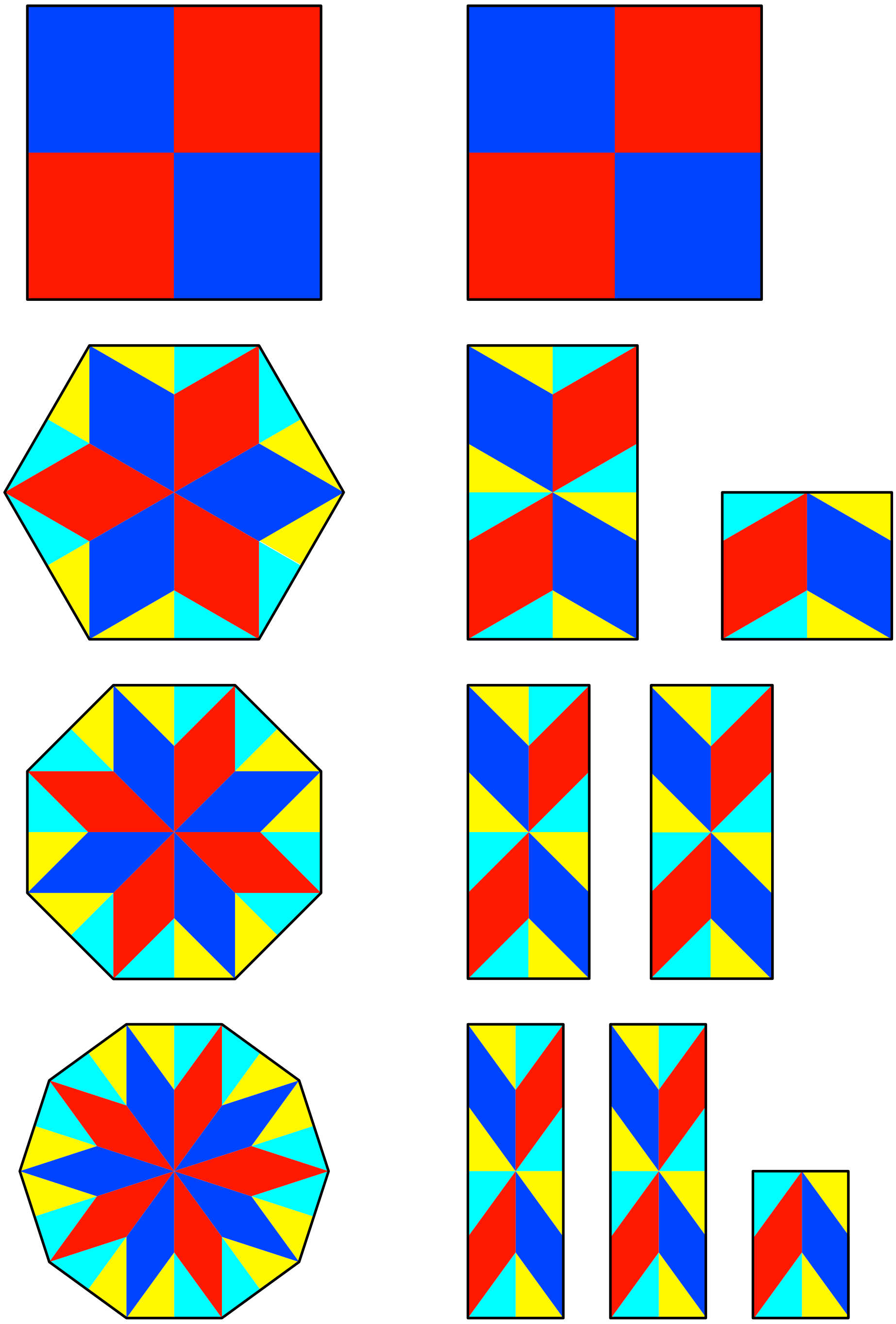


Abb. 2: Zerlegungsbeweise

Die Abbildung 3 zeigt dasselbe in einer anderen Färbung.



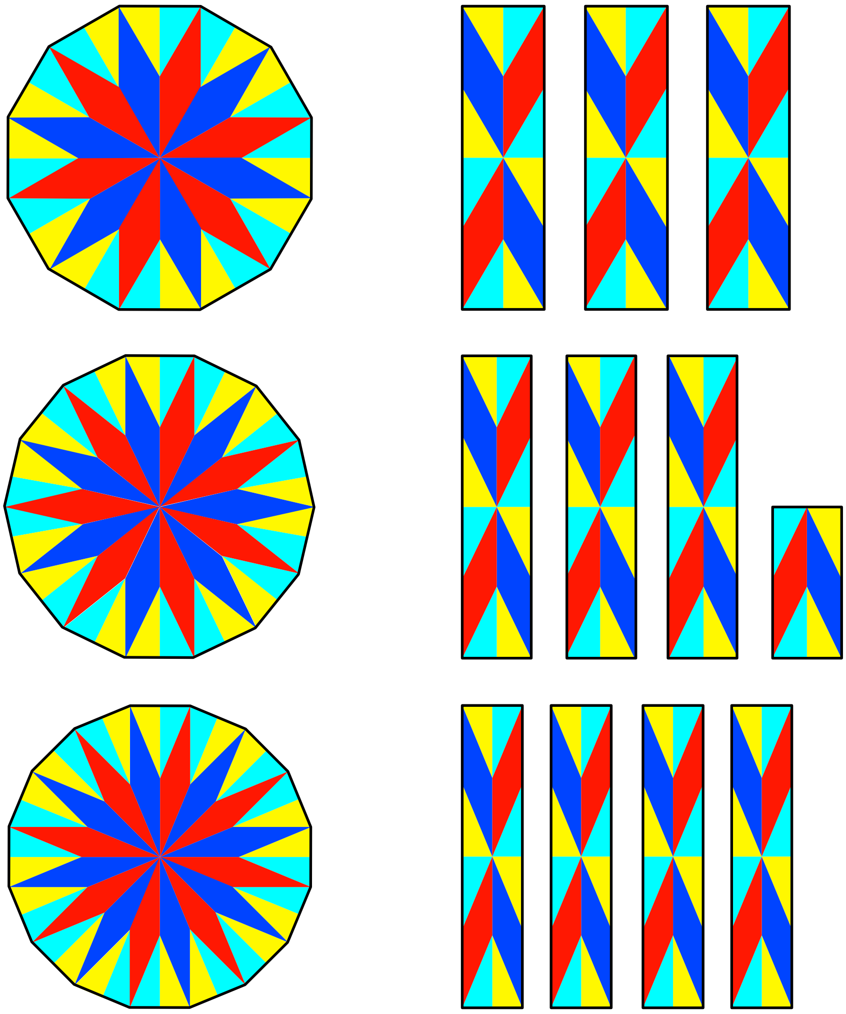
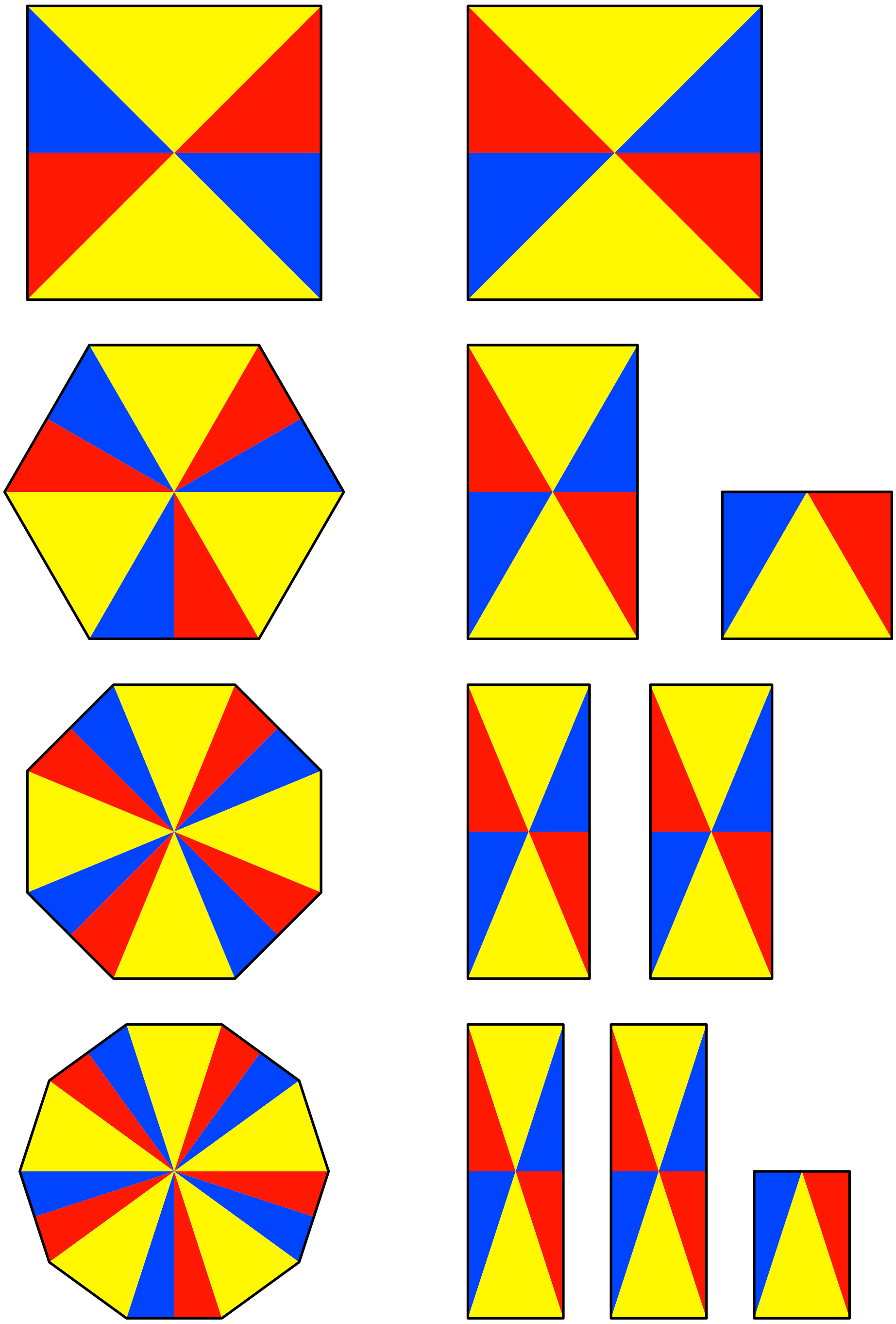


Abb. 3: Sterne

Die Abbildung 4 zeigt eine weitere Variante.



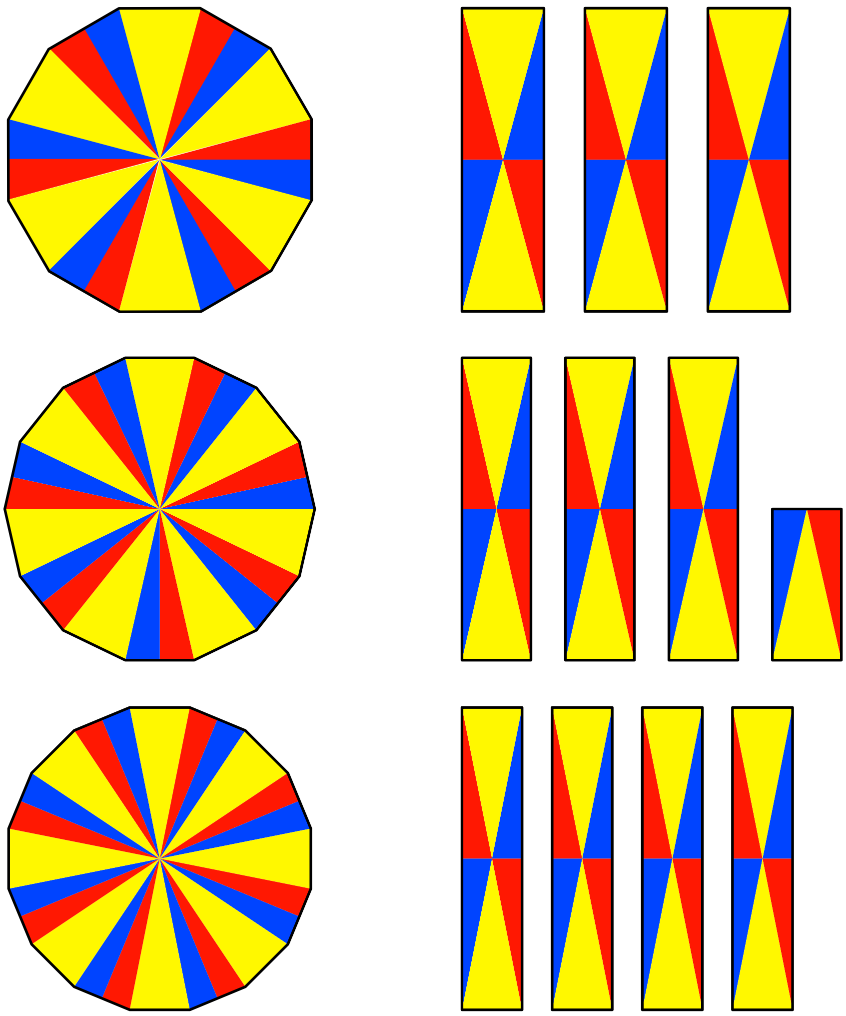


Abb. 4: Variante

Natürlich gibt es noch viele andere Zerlegungsbeweise.

Literatur

Euler, L. (1782): Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. *Opera Omnia*, Series 1, Volume 7, 291-392. Eneström Index 530.