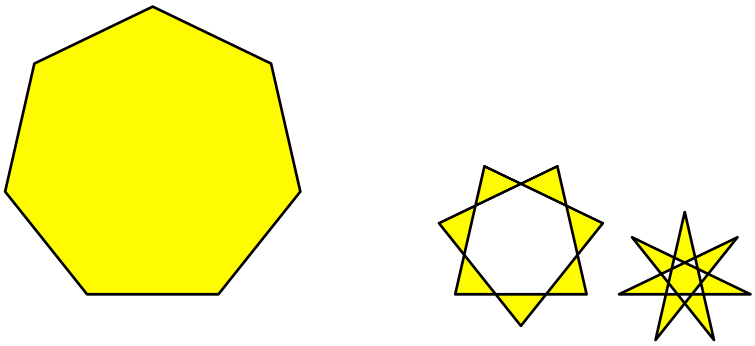
Hans Walser, [20150901]

Regelmäßige Sterne

1 Worum geht es?

Die regelmäßigen Vielecke können auch mit Selbstüberlagerung („überschlagen“) gezeichnet werden.

Die Abbildung 1 zeigt die Situation bei Siebenecken. Alle drei Figuren haben dieselbe Seitenlänge.



a) b) c)

Abb. 1: Regelmäßige Siebenecke

Das regelmäßige Siebeneck der Abbildung 1a wird mit dem Schläfli-Symbol $\{7\}$ oder auch $\left\{\frac{7}{1}\right\}$ bezeichnet. Das regelmäßige Siebeneck hat den Außenwinkel $\frac{2\pi}{7} = \frac{360°}{7}$.

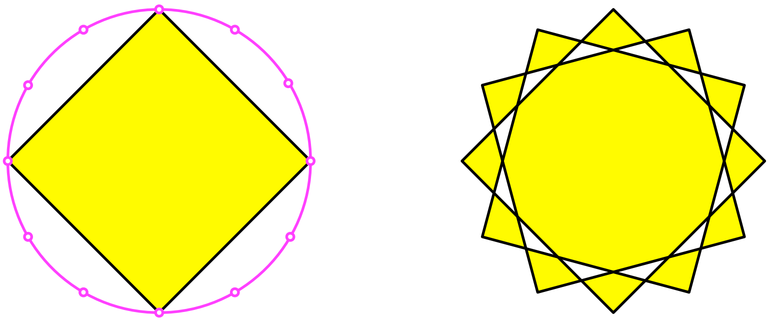
Der Stern der Abbildung 1b hat das Schläfli-Symbol $\left\{\frac{7}{2}\right\}$. Dies kann verschieden interpretiert werden. Wir können uns sieben gleichmäßig auf einem Kreis verteilte Punkte vorstellen, bei denen nun jeder zweite ausgewählt wird. Oder wir können sagen, dass der Streckenzug zweimal um das Zentrum herumläuft, bevor er sich schließt. Daher hat dieser Stern den Außenwinkel $2\frac{2\pi}{7} = \frac{720°}{7}$. Die einzelnen Strecken des Streckenzuges haben dabei alle die gleiche Länge.

Beim Stern $\left\{\frac{7}{3}\right\}$ der Abbildung 1c wird jeder dritte Punkt ausgewählt, und der Streckenzug läuft dreimal um das Zentrum. Der Außenwinkel ist $3\frac{2\pi}{7} = \frac{1080°}{7}$.

Wir sehen, wie die Verallgemeinerung $\left\{\frac{n}{k}\right\}$ läuft.

2 Probleme mit Teilern

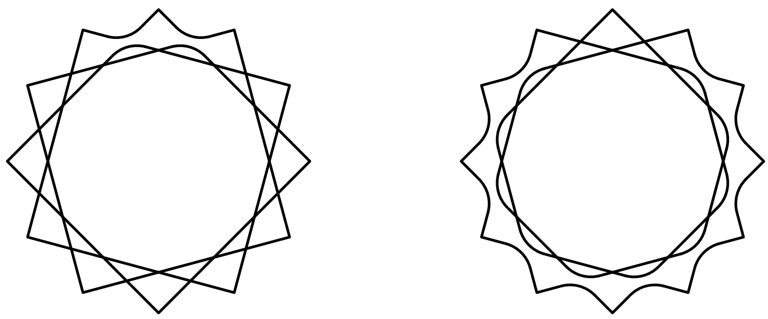
Ein Problem tritt auf, wenn k ein Teiler von n ist. Beispiel: in $\left\{\frac{12}{3}\right\}$ können wir verschieden vorgehen. Wenn wir jeden dritten Punkt nehmen, erhalten wir ein dreimal durchlaufenes Quadrat (Abb. 2a). Die vier Ecken müssen jeder dreimal gezählt werden. So kommen wir schon auf 12 Ecken, aber sie sind nicht sichtbar.



a) b)

Abb. 2: Der Stern {12/3}

Wir können aber auch ein Quadrat um 30° und um 60° verdrehen (Abb. 2b). Dann wird jedenfalls das Zentrum auch dreimal umfahren. Hingegen wird es etwas schwieriger, dieses dreimalige Umfahren mit *einem* geschlossenen Streckenzug zu bewerkstelligen. Die Abbildung 3a zeigt eine Lösung. Wir müssen bei zwei Kreuzungen abbiegen statt geradeaus fahren. Diese Lösung hat allerdings den Nachteil, dass die Strecken des Streckenzuges nicht mehr gleich lang sind. Die Abbildung 3b zeigt eine andere Lösung. Wie viele Lösungen gibt es?



a) b)

Abb. 3: Zusammenhängende Kurven

Im Folgenden wird die Version der Abbildung 2b verwendet.

3 Fluchtlinien

In der Abbildung 1 sind die drei Figuren mit ungleichen Zwischenräumen angegeben. Dies deshalb, weil wir so zwei „Fluchtlinien“ haben (Abb. 4).

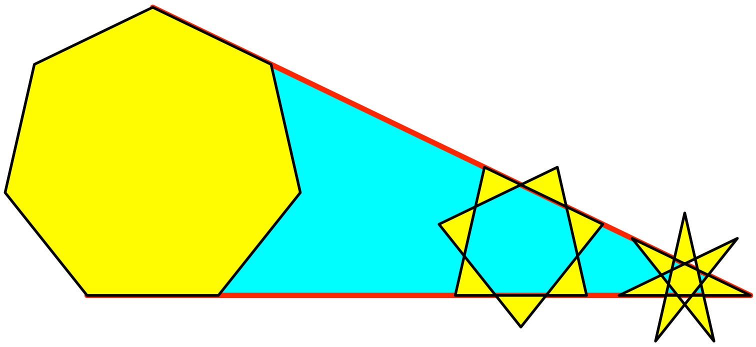


Abb. 4: Fluchtlinien

4 Bildergalerie

Für die Eckenzahlen $n = 3$ und $n = 4$ gibt es keine Sterne.

Für die Eckenzahl $n = 5$ gibt es neben dem Pentagon das Pentagramm (Drudenfuß).

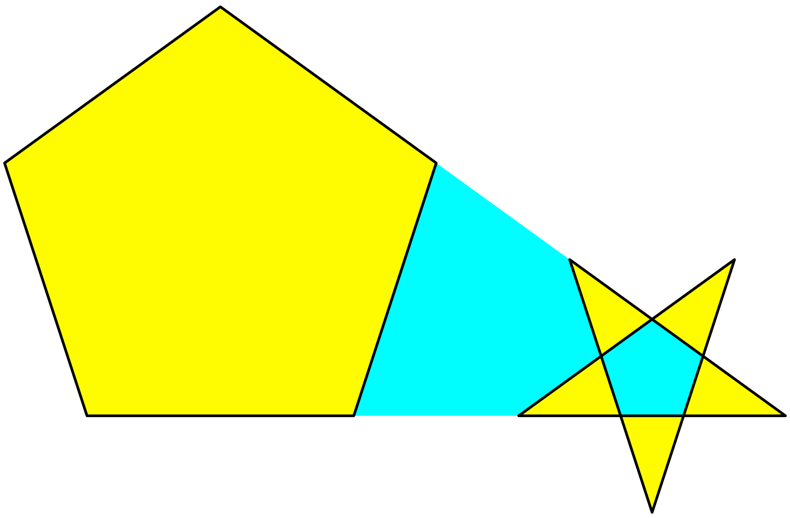


Abb. 5: Eckenzahl 5

Für die Eckenzahl $n = 6$ wird die Figur kompakt (Abb. 6). Dieses Phänomen tritt bei geraden Eckenzahlen auf.

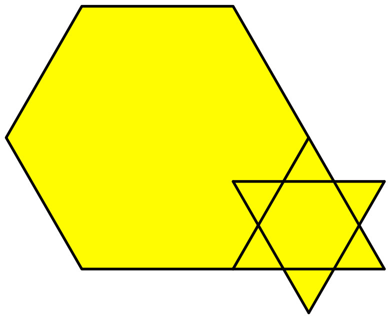


Abb. 6: Kompaktlösung

Die Abbildung 7 zeigt nochmals den Fall für die Eckenzahl $n = 7$. Wir haben zum ersten Mal zwei Sterne.

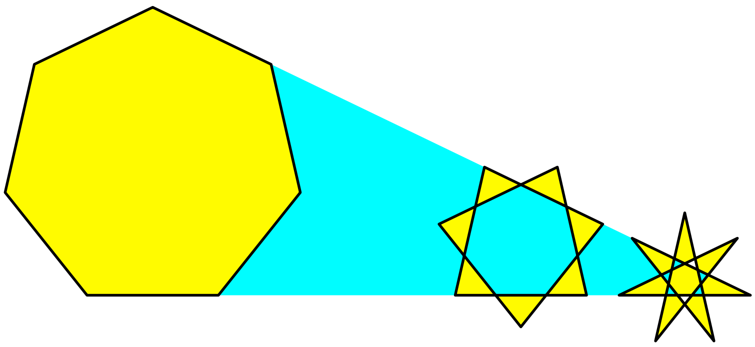


Abb. 7: Eckenzahl 7

Bei der Eckenzahl $n = 8$ gibt es wieder eine Kompaktlösung (Abb. 8).

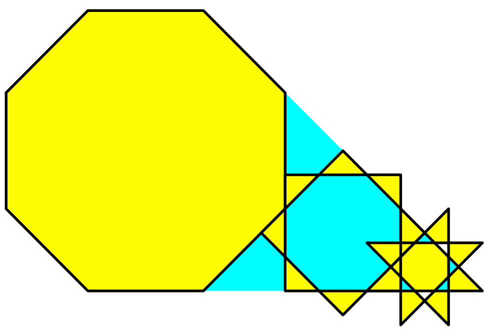


Abb. 8: Eckenzahl 8

Bei der Eckenzahl $n = 9$ gibt es drei Sterne (Abb. 9).

Die Anzahl der Sterne ist allgemein $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$.

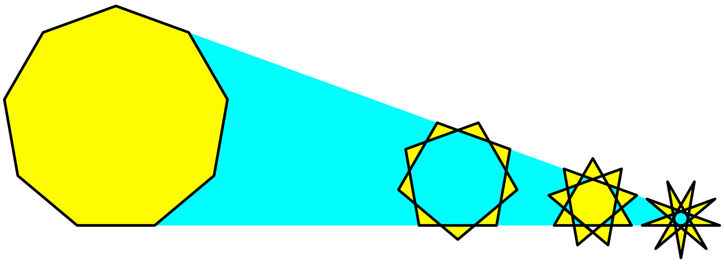


Abb. 9: Eckenzahl 9

Das Gedränge bei der Eckenzahl $n = 10$ war zu erwarten (Abb. 10).

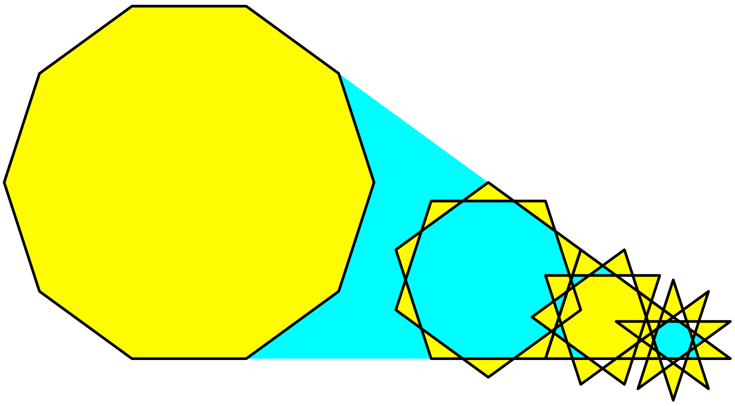


Abb. 10: Eckenzahl 10

Bei der Eckenzahl $n = 11$ erscheint ein vierter Stern (Abb. 11).

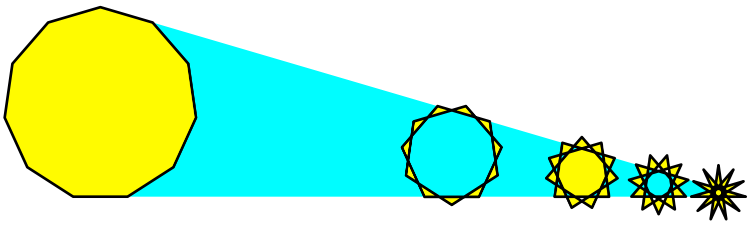


Abb. 11: Eckenzahl 11

Schließlich bei der Eckenzahl n = 12 nochmals eine Kompaktsituation (Abb. 12):

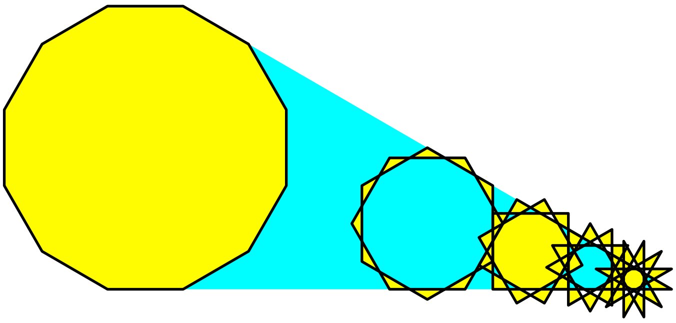


Abb. 12: Eckenzahl 12

5 Sternbilder

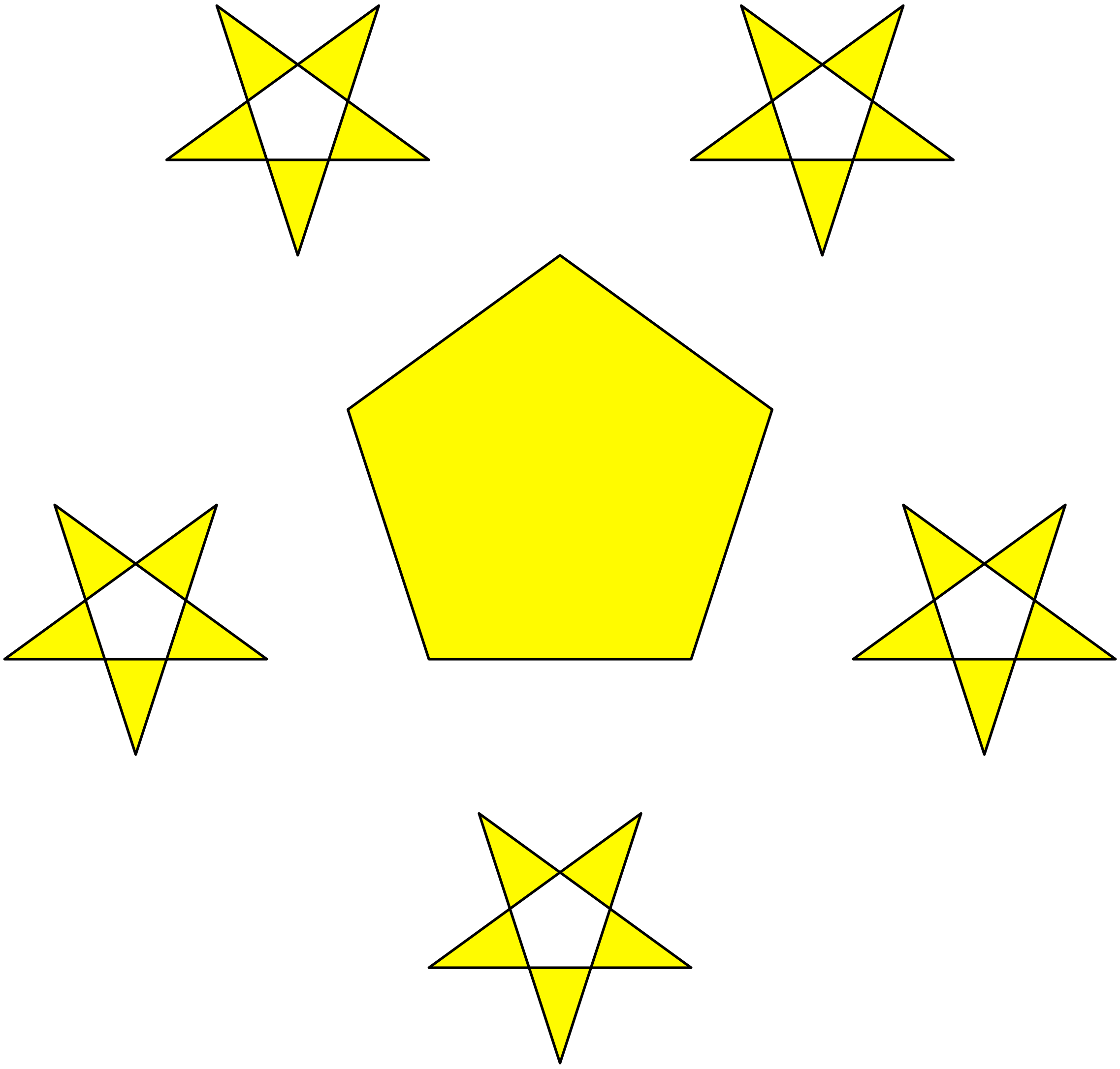


Abb. 13: Cluster mit Fünfecksternen

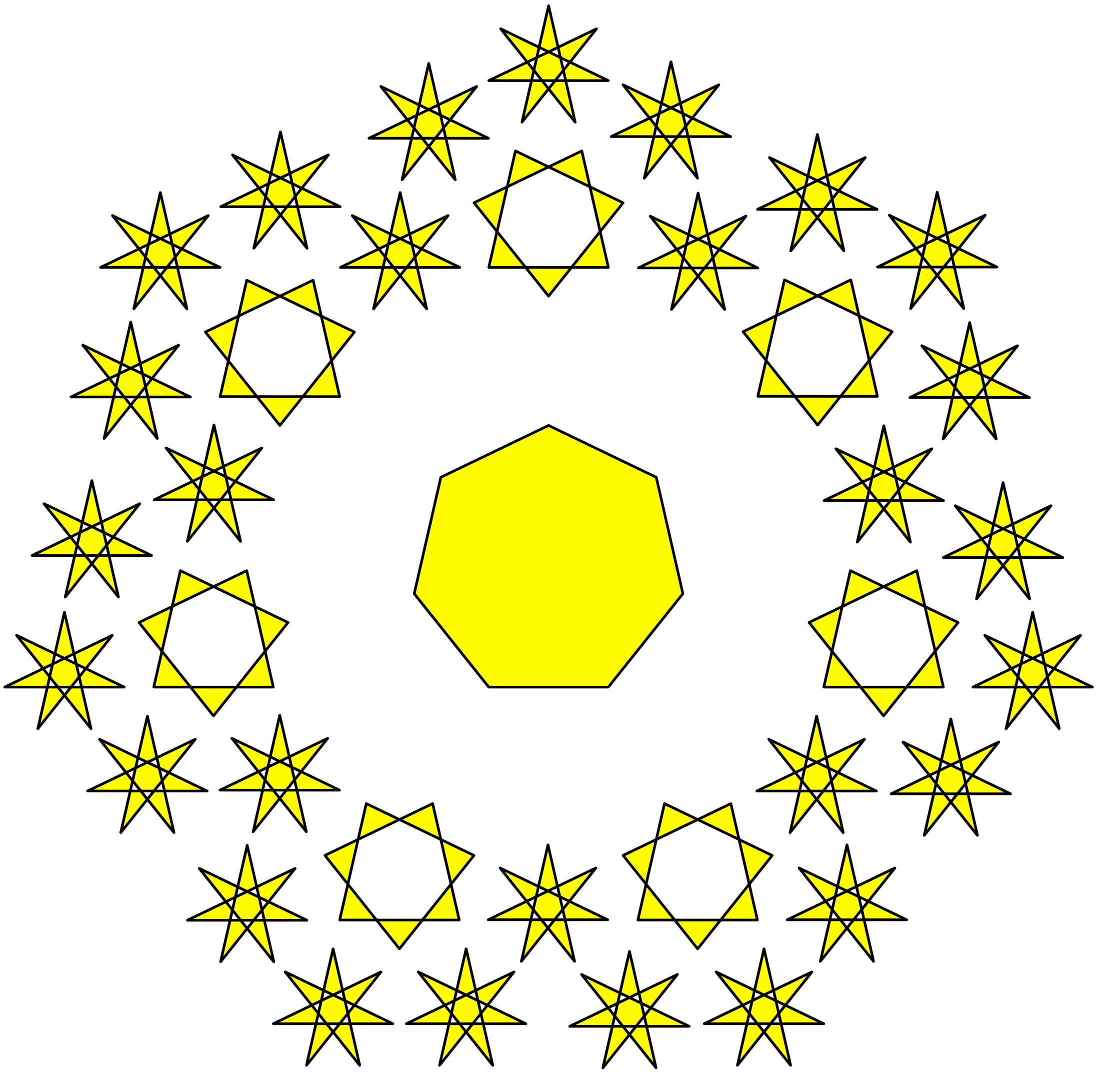


Abb. 14: Cluster mit Siebenecksternen

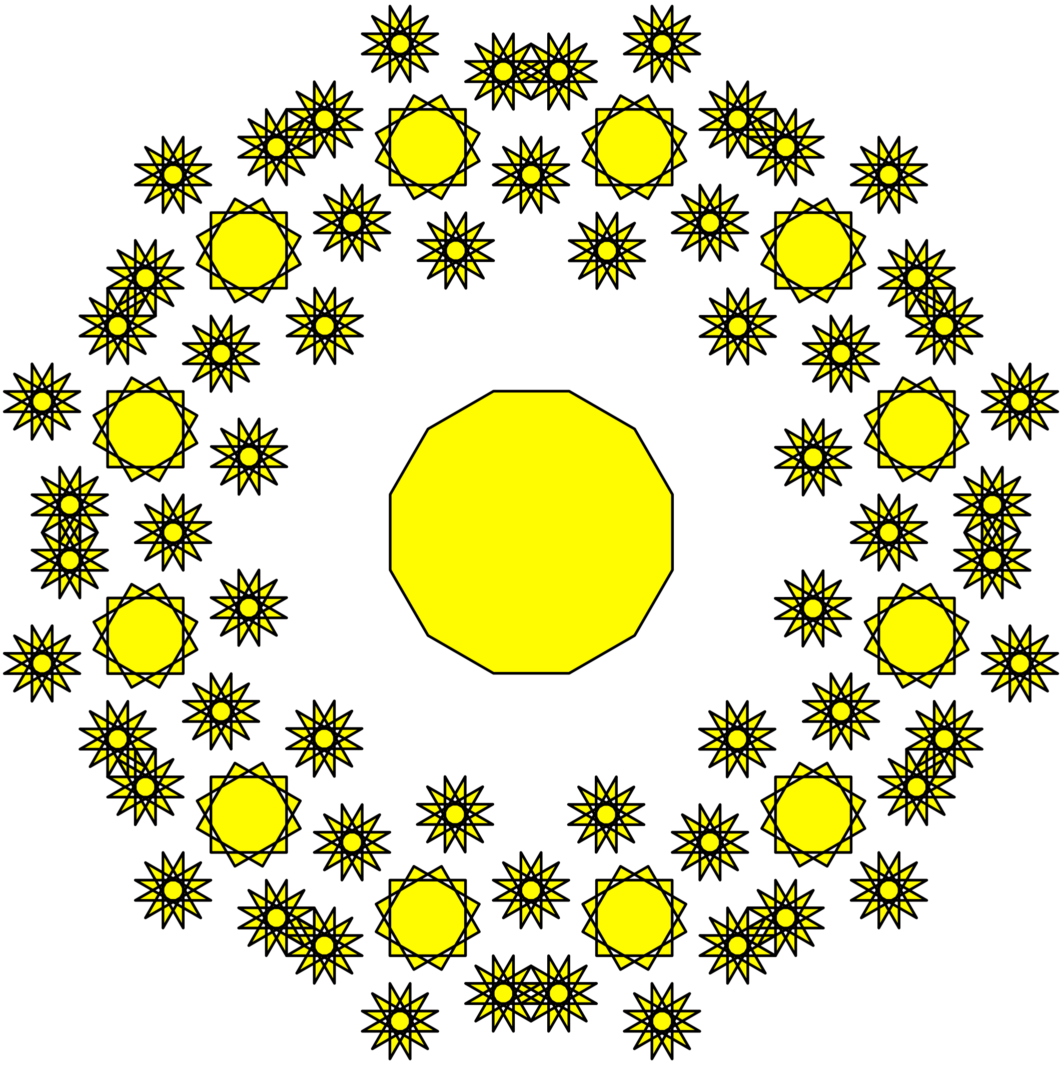


Abb. 15: Zwölfecksterne