Hans Walser, [20161021]

Reflexion am Kreis

1 Erinnerung

Die Aufgabe ist so alt wie die Spiegelungsgeometrie. „Ein Reiter hat von A nach B zu reiten und möchte dazwischen sein Ross am linearen Bache k tränken“. Die optimale Lösung mit der kürzesten gesamten Wegelänge finden wir mit einer Spiegelung.

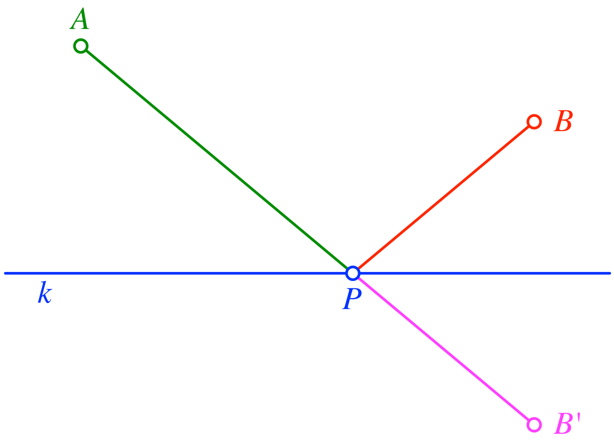


Abb. 1: Das Ross und der Reiter

2 Die Aufgabe mit dem Kreis

Wir ersetzen den Bach durch einen kreisrunden Teich (Abb. 2).

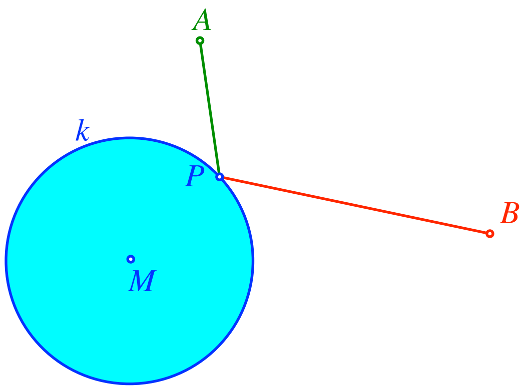


Abb. 2: Der Teich

Diese Aufgabe ist mir weder als Schüler noch als Lehrer je begegnet. Offenbar ist sie mit konventionellen schulischen Methoden nicht lösbar.

3 Lösungsansätze

Die folgenden Methoden sind Einschiebelösungen. Also Suchlösungen.

3.1 Winkelhalbierende

Wir verschieben den Punkt P auf dem Kreis k so, dass die beiden in der Abbildung 3 angegebenen Winkel α und β gleich groß werden.

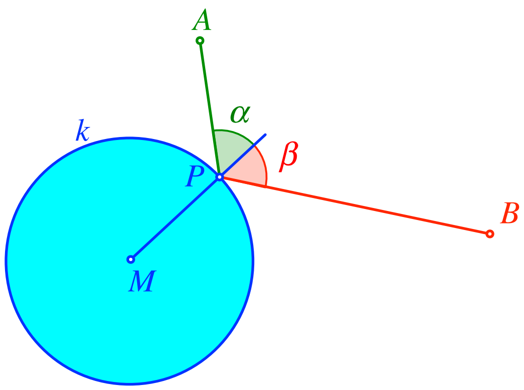


Abb. 3: Gleiche Winkel

Handwerkliches: Wir zeigen die Differenz der beiden Winkel an, zoomen bei P hinein und verschieben P, bis die Differenz hinreichend nach bei null ist.

3.2 Ellipse

Wir wählen einen Punkt P auf k und zeichnen die Ellipse mit den Brennpunkten A und B durch P (Abb. 4). Q sei der zweite Schnittpunkt der Ellipse mit k.

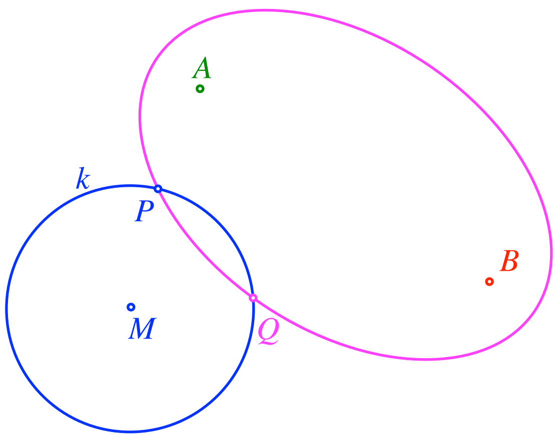


Abb. 4: Ellipse

Dann verschieben wir den Punkt P auf k bis Q und P zusammenfallen (Abb. 5). Dies liefert die Lösung.

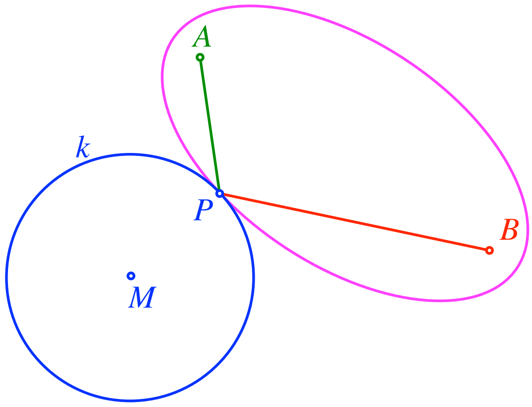


Abb. 5: Zusammenfallende Schnittpunkte

3.3 Analysis

Wir verwenden ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem der Kreis k der Einheitskreis ist. Den Punkt P parametrisieren wir mit $P(\cos(t), \sin(t))$. Wir beschreiben die gesamte Wegelänge als Funktion von t:

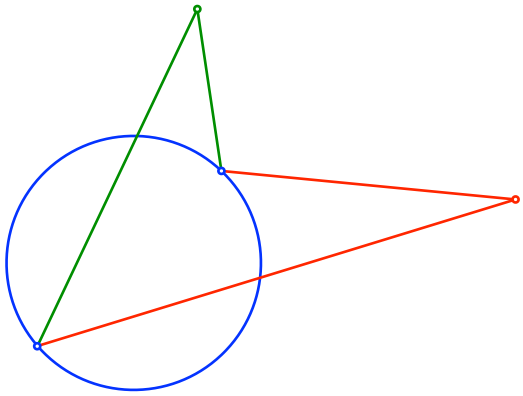
$$f(t)=\sqrt{\left(x_A-\cos(t)\right)^2+\left(y_A-\sin(t)\right)^2}+\sqrt{\left(x_B-\cos(t)\right)^2+\left(y_B-\sin(t)\right)^2} \qquad (1)$$

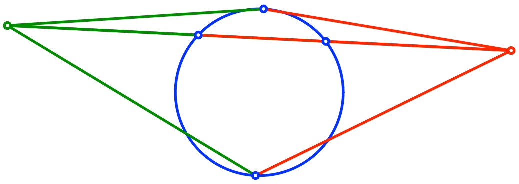
Für diese Funktion suchen wir die Extremstellen.

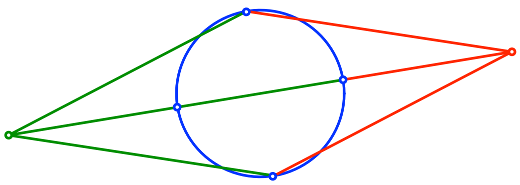
Es kann bis zu vier verschiedene Lösungen geben.

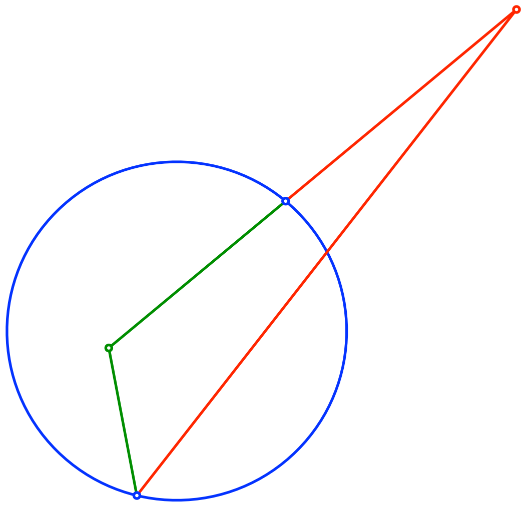
Neben den Minimallösungen gibt es auch Maximallösungen. Diese können ebenfalls als Reflexion am Kreis verstanden werden.

Die Abbildung 6 gibt einige Beispiele.









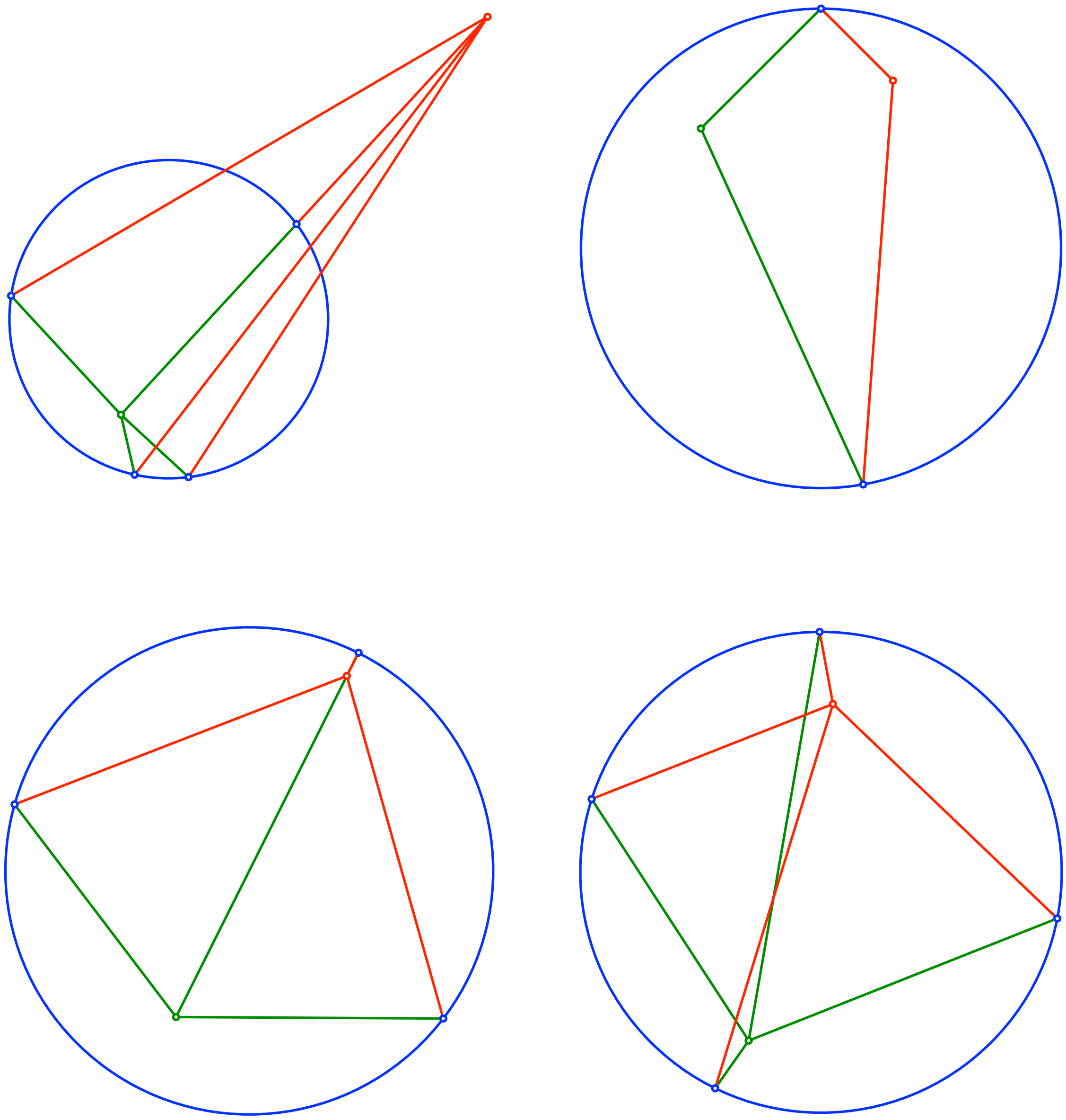


Abb. 6: Beispiele