

Hans Walser, [20170819]

Rechtecksunterteilung

1 Worum geht es?

Wir unterteilen ein Rechteck mit ganzzahligen Seitenlängen m und n in möglichst wenige Quadrate.

Die Abbildung 1 zeigt das Beispiel $m = 93$ und $n = 36$.

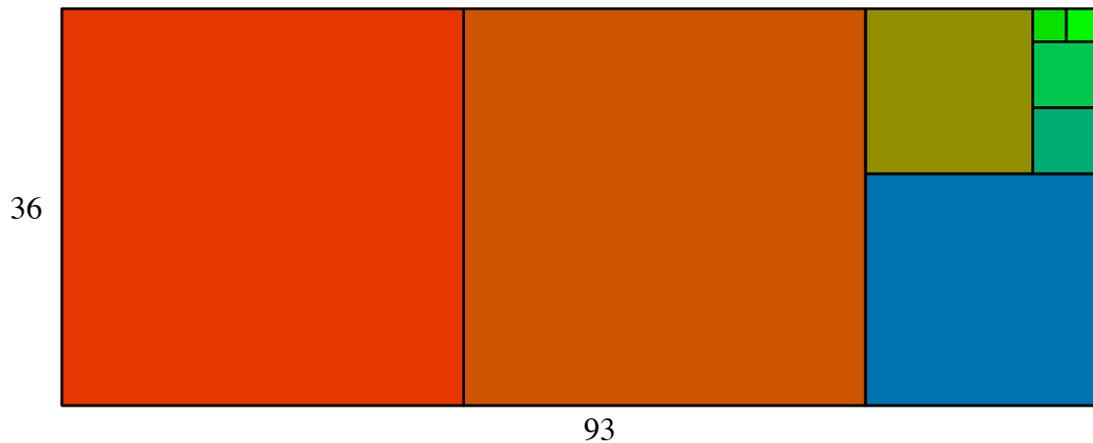


Abb. 1: Unterteilung in Quadrate

2 Der Algorithmus

Das Verfahren geht so:

Wir beginnen mit dem Rechteck der Breite 93 und der Höhe 36. Davon schneiden wir Quadrate der Seitenlänge 36 ab. Das geht zwei Mal, da:

$$93 : 36 = 2 \quad \text{Rest } 21 \quad (1)$$

Es bleibt ein Rechteck der Breite 21 und der Höhe 36 übrig. Davon schneiden wir Quadrate der Seitenlänge 21 ab. Das geht nur ein Mal, da:

$$36 : 21 = 1 \quad \text{Rest } 15 \quad (2)$$

Es bleibt ein Rechteck der Breite 21 und der Höhe 15 übrig. Davon schneiden wir Quadrate der Seitenlänge 15 ab. Das geht ein Mal, da:

$$21 : 15 = 1 \quad \text{Rest } 6 \quad (3)$$

Es bleibt ein Rechteck der Breite 6 und der Höhe 15 übrig. Davon schneiden wir Quadrate der Seitenlänge 6 ab. Das geht zwei Mal, da:

$$15 : 6 = 2 \quad \text{Rest } 3 \quad (4)$$

Es bleibt ein Rechteck der Breite 6 und der Höhe 3 übrig. Davon schneiden wir Quadrate der Seitenlänge 3 ab. Das geht exakt zwei Mal, da:

$$6 : 3 = 2 \quad \text{Rest } 0 \quad (5)$$

Wir sind fertig.

Die Gleichungen (1) bis (5) sehen zusammengefasst so aus:

$$\begin{aligned} 93 : 36 &= 2 \quad \text{Rest } 21 \\ 36 : 21 &= 1 \quad \text{Rest } 15 \\ 21 : 15 &= 1 \quad \text{Rest } 6 \\ 15 : 6 &= 2 \quad \text{Rest } 3 \\ 6 : 3 &= 2 \quad \text{Rest } 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Das ist aber der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers. Dies ist der letzte von null verschiedene Rest (blau).

In unserem Beispiel ist $\text{ggT}(93, 36) = 3$.

Die Summe der rot markierten Zahlen ist die Gesamtzahl der benötigten Quadrate. In unserem Beispiel benötigen wir 8 Quadrate.

3 Tabellen

Die Tabelle 1 gibt die Anzahlen der benötigten Quadrate in Abhängigkeit von m und n .
Vergleiche dazu das Zahlendreieck [A113881](#):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	1	3	2	4	3	5	4	6	5	7	6	8	7	9	8	10	9	11	10
3	3	1	4	4	2	5	5	3	6	6	4	7	7	5	8	8	6	9	9
4	2	4	1	5	3	5	2	6	4	6	3	7	5	7	4	8	6	8	5
5	4	4	5	1	6	5	5	6	2	7	6	6	7	3	8	7	7	8	4
6	3	2	3	6	1	7	4	3	4	7	2	8	5	4	5	8	3	9	6
7	5	5	5	5	7	1	8	6	6	6	6	8	2	9	7	7	7	7	9
8	4	5	2	5	4	8	1	9	5	6	3	6	5	9	2	10	6	7	4
9	6	3	6	6	3	6	9	1	10	7	4	7	7	4	7	10	2	11	8
10	5	6	4	2	4	6	5	10	1	11	6	7	5	3	5	7	6	11	2
11	7	6	6	7	7	6	6	7	11	1	12	8	7	7	8	8	7	7	8
12	6	4	3	6	2	6	3	4	6	12	1	13	7	5	4	7	3	7	4
13	8	7	7	6	8	8	6	7	7	8	13	1	14	9	8	8	7	9	9
14	7	7	5	7	5	2	5	7	5	7	7	14	1	15	8	8	6	8	6
15	9	5	7	3	4	9	9	4	3	7	5	9	15	1	16	10	6	8	4
16	8	8	4	8	5	7	2	7	5	8	4	8	8	16	1	17	9	9	5
17	10	8	8	7	8	7	10	10	7	8	7	8	8	10	17	1	18	11	9
18	9	6	6	7	3	7	6	2	6	7	3	7	6	6	9	18	1	19	10
19	11	9	8	8	9	7	7	11	11	7	7	9	8	8	9	11	19	1	20
20	10	9	5	4	6	9	4	8	2	8	4	9	6	4	5	9	10	20	1

Tab. 1: Anzahl der benötigten Quadrate

Die Tabelle ist natürlich symmetrisch und hat Einsen in der Hauptdiagonalen.

Unterhalb der Hauptdiagonalen erkennen wir ein Zahlendreieck, das seinerseits symmetrisch ist (Tab. 2).

2																		
3	3																	
4	2	4																
5	4	4	5															
6	3	2	3	6														
7	5	5	5	5	7													
8	4	5	2	5	4	8												
9	6	3	6	6	3	6	9											
10	5	6	4	2	4	6	5	10										
11	7	6	6	7	7	6	6	7	11									
12	6	4	3	6	2	6	3	4	6	12								
13	8	7	7	6	8	8	6	7	7	8	13							
14	7	7	5	7	5	2	5	7	5	7	7	14						
15	9	5	7	3	4	9	9	4	3	7	5	9	15					
16	8	8	4	8	5	7	2	7	5	8	4	8	8	16				
17	10	8	8	7	8	7	10	10	7	8	7	8	8	10	17			
18	9	6	6	7	3	7	6	2	6	7	3	7	6	6	9	18		
19	11	9	8	8	9	7	7	11	11	7	7	9	8	8	9	11	19	
20	10	9	5	4	6	9	4	8	2	8	4	9	6	4	5	9	10	20

Tab. 2: Zahlendreieck

Dieses Zahlendreieck ist verwandt mit dem Zahlendreieck [A110570](#).

4 Raster

Die Abbildung 2 zeigt alle $m \times n$ -Rechtecke mit Unterteilungen für $(m,n) \in \{1,\dots,10\} \times \{1,\dots,10\}$.

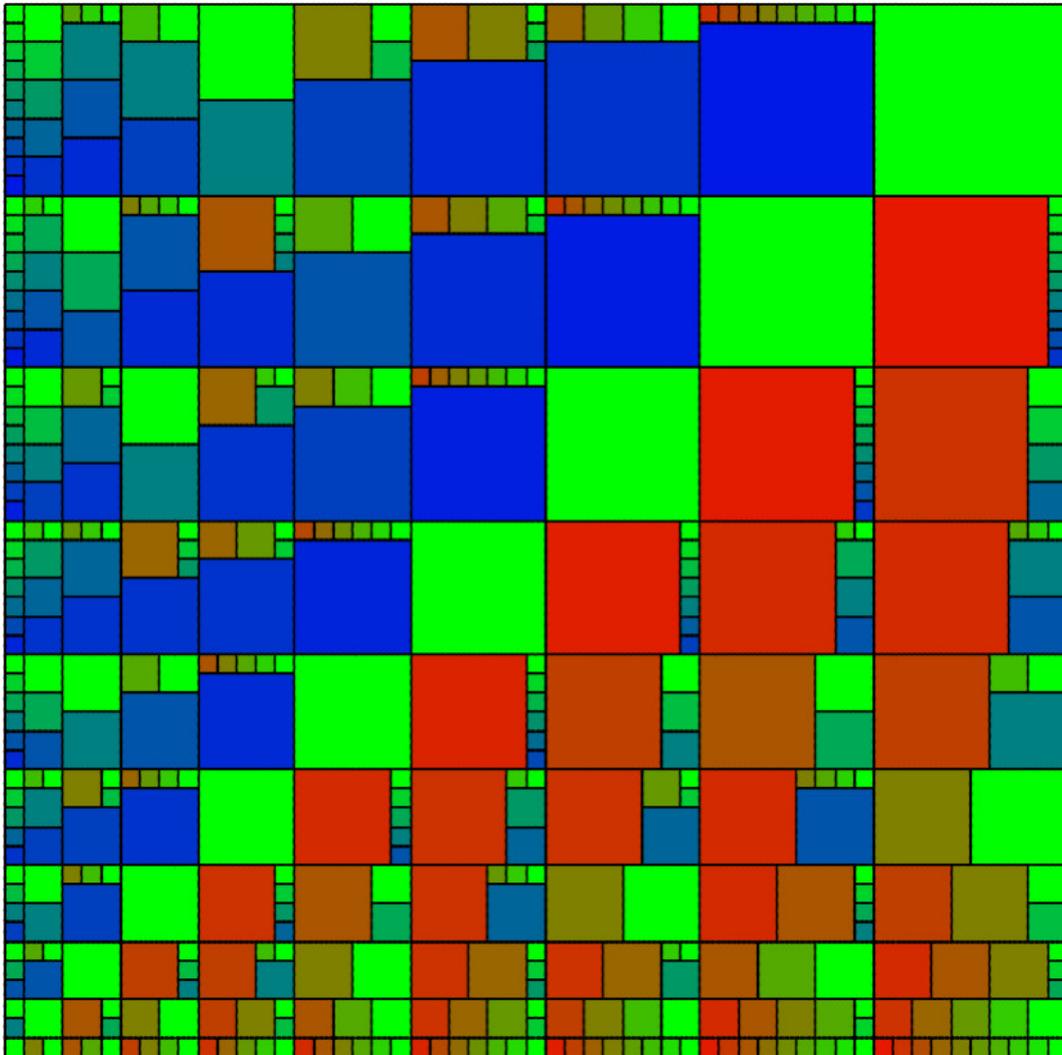


Abb. 2: Unterteilungen

Websites

The on-line encyclopedia of integer sequences (Abgerufen 28.8.2017):

<https://oeis.org/A110570>

The on-line encyclopedia of integer sequences (Abgerufen 28.8.2017):

<https://oeis.org/A113881>

Hans Walser: Quadratunterteilung (Abgerufen 28.8.2017):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadratunterteilung2/Quadratunterteilung2.htm