Hans Walser, [20160502]

Quadratzahlenfolge

1 Worum geht es?

Es werden rekursiv definierte Folgen vorgestellt, die ausschließlich aus Quadratzahlen bestehen.

2 Beispiel

Die durch die Rekursion

$$a_{n+1} = 5a_n + 5a_{n-1} - a_{n-2} \tag{1}$$

mit den Startwerten

$$a_{-1} = 1, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \tag{2}$$

definierte Folge besteht ausschließlich aus Quadratzahlen.

Für den geometrischen Hintergrund siehe [1].

3 Symmetrie

Zunächst eine Bemerkung zur Symmetrie. Die eilige Leserin kann diese Bemerkung überspringen.

Wenn wir die Folge rückwärts laufen lassen, erhalten wir aus (1) die Rekursion.

$$a_{n-2} = 5a_{n-1} + 5a_n - a_{n+1} \tag{3}$$

Da auch die Startwerte bezüglich der Null symmetrisch sind haben wir eine symmetrische Folge:

$$a_{-n} = a_n \tag{4}$$

4 Bearbeitung

4.1 Tabelle

Die Tabelle 1 gibt die ersten Werte mit nichtnegativem Index.

n	a_n	$\sqrt{a_n}$
0	0	0
1	1	1
2	4	2
3	25	5
4	144	12
5	841	29
6	4900	70
7	28561	169
8	166464	408
9	970225	985
10	5654884	2378

Tab. 1: Werte und Wurzeln

4.2 Explizite Formel

Die explizite Formel für die Folge a_n finden wir wie folgt.
Aus der Rekursion (1) bauen wir die kubische Gleichung:

$$x^3 = 5x^2 + 5x - 1 \tag{5}$$

Diese hat die drei Lösungen:

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{2}, \quad x_3 = -1 \tag{6}$$

Bemerkung für Lehrer: die Lösung $x_3 = -1$ „sieht" man sofort.
Für die explizite Formel machen wir den Ansatz:

$$a_n = px_1^n + qx_2^n + rx_3^n = p\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + q\left(3-2\sqrt{2}\right)^n + r(-1)^n \tag{7}$$

Einsetzen der drei Startwerte (2) liefert ein lineares Gleichungssystem für $\{p, q, r\}$ mit den Lösungen:

$$\left\{p = \tfrac{1}{8}, \quad q = \tfrac{1}{8}, \quad r = -\tfrac{1}{4}\right\} \tag{8}$$

Die explizite Formel lautet also:

$$a_n = \tfrac{1}{8}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \tfrac{1}{8}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n - \tfrac{1}{4}(-1)^n \tag{9}$$

Diese Formel müssen wir noch mit (1) und (2) induktiv verifizieren (mit CAS).

4.3 Heuristisches Vorgehen

Aus der Tabelle 1 ersehen wir die Quadratwurzeln für die ersten 11 Werte. Wir vermuten, dass dazu die Rekursion

$$b_{n+1} = 2b_n + b_{n-1} \tag{10}$$

passt. Jedenfalls können wir für die Folge b_n mit der Rekursion (10) und den Startwerten (aus der Tabelle 1)

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1 \tag{11}$$

die explizite Formel bestimmen. Dies geht analog zum obigen Beispiel. Aus (10) bauen wir die quadratische Gleichung:

$$x^2 = 2x + 1 \tag{12}$$

Mit den beiden Lösungen

$$x_1 = 1+\sqrt{2}, \quad x_2 = 1-\sqrt{2} \tag{13}$$

machen wir den Ansatz:

$$b_n = px_1^n + qx_2^n \tag{14}$$

Wir setzen die Startwerte (11) ein und erhalten ein lineares Gleichungssystem für $\{p, q\}$ mit den Lösungen:

$$\left\{p = \tfrac{\sqrt{2}}{4}, q = -\tfrac{\sqrt{2}}{4}\right\} \tag{15}$$

Damit haben wir die explizite Formel

$$b_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right) \tag{16}$$

welche mit (10) und (11) induktiv verifiziert wird.

4.4 Beweis der Quadrateigenschaft

Und nun kommt der Gag. Es ist

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)\right)^2 = \tfrac{1}{8}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n + \tfrac{1}{8}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n - \tfrac{1}{4}(-1)^n \tag{17}$$

Damit ist bewiesen, dass (1) und (2) eine Folge generieren, die ausschließlich aus Quadratzahlen besteht.

Der Problemschlüssel ist die Beziehung:

$$\left(1 \pm \sqrt{2}\right)^2 = 3 \pm 2\sqrt{2} \tag{18}$$

5 Übungsaufgabe

Die durch die Rekursion

$$a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1} - a_{n-2} \tag{19}$$

mit den Startwerten

$$a_{-1} = 1, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \tag{20}$$

definierte Folge besteht ausschließlich aus Quadratzahlen.

6 Allgemein

6.1 Die Folge

Die Folge mit den Startwerten (2) und der Rekursion

$$a_{n+1} = \left(k^2+1\right)a_n + \left(k^2+1\right)a_{n-1} - a_{n-2} \tag{21}$$

besteht ausschließlich aus Quadratzahlen. Und zwar sind es die Quadrate der Folgenglieder b_n mit den Startwerten (11) und der Rekursion:

$$b_{n+1} = kb_n + b_{n-1} \tag{22}$$

Der Beweis läuft analog zum obigen speziellen Beispiel (das Beispiel steht für $k = 2$).

6.2 Explizite Formel

Wir bilden aus der Rekursion (21) die kubische Gleichung:

$$x^3 = \left(k^2+1\right)x^2 + \left(k^2+1\right)x - 1 \tag{23}$$

Diese hat die Lösungen:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(k^2+2+k\sqrt{k^2+4}\right), \quad x_2 = \tfrac{1}{2}\left(k^2+2-k\sqrt{k^2+4}\right), \quad x_3 = -1 \tag{24}$$

Für die explizite Formel machen wir den Ansatz:

$$\begin{aligned} a_n &= px_1^n + qx_2^n + rx_3^n \\ &= p\left(\tfrac{1}{2}\left(k^2+2+k\sqrt{k^2+4}\right)\right)^n + q\left(\tfrac{1}{2}\left(k^2+2-k\sqrt{k^2+4}\right)\right)^n + r(-1)^n \end{aligned} \tag{25}$$

Einsetzen der drei Startwerte (2) liefert ein lineares Gleichungssystem für $\{p, q, r\}$ mit den Lösungen:

$$\left\{p = \tfrac{1}{k^2+4}, \quad q = \tfrac{1}{k^2+4}, \quad r = -\tfrac{2}{k^2+4}\right\} \tag{29}$$

Die explizite Formel lautet also:

$$a_n = \tfrac{1}{k^2+4}\left(\left(\tfrac{1}{2}\left(k^2+2+k\sqrt{k^2+4}\right)\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\left(k^2+2-k\sqrt{k^2+4}\right)\right)^n - 2(-1)^n\right) \tag{30}$$

Diese Formel müssen wir noch mit (2) und (21) induktiv verifizieren.

6.3 Heuristisches Vorgehen

Wir bilden die Folge b_n mit den Startwerten (10) und der Rekursion:

$$b_{n+1} = kb_n + b_{n-1} \tag{31}$$

Für diese Folge b_n bestimmen wir die explizite Formel. Aus (31) bauen wir die quadratische Gleichung:

$$x^2 = kx + 1 \tag{32}$$

Mit den beiden Lösungen

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(k + \sqrt{k^2+4}\right), \quad x_2 = \tfrac{1}{2}\left(k - \sqrt{k^2+4}\right) \tag{33}$$

machen wir den Ansatz:

$$b_n = px_1^n + qx_2^n \tag{34}$$

Wir setzen die Startwerte (11) ein und erhalten ein lineares Gleichungssystem für $\{p, q\}$ mit den Lösungen:

$$\left\{p = \tfrac{1}{\sqrt{k^2+4}}, q = \tfrac{-1}{\sqrt{k^2+4}}\right\} \tag{35}$$

Damit haben wir die explizite Formel

$$b_n = \tfrac{1}{\sqrt{k^2+4}}\left(\left(\tfrac{1}{2}\left(k + \sqrt{k^2+4}\right)\right)^n - \left(\tfrac{1}{2}\left(k - \sqrt{k^2+4}\right)\right)^n\right) \tag{36}$$

welche mit (11) und (32) induktiv verifiziert wird.

6.4 Beweis der Quadrateigenschaft

Und nun kommt der Gag. Es ist

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{\sqrt{k^2+4}}\left(\left(\tfrac{1}{2}\left(k+\sqrt{k^2+4}\right)\right)^n-\left(\tfrac{1}{2}\left(k-\sqrt{k^2+4}\right)\right)^n\right)\right)^2=\\&=\tfrac{1}{k^2+4}\left(\left(\tfrac{1}{2}\left(k^2+2+k\sqrt{k^2+4}\right)\right)^n+\left(\tfrac{1}{2}\left(k^2+2-k\sqrt{k^2+4}\right)\right)^n-2(-1)^n\right)\end{aligned} \tag{37}$$

Damit ist bewiesen, dass (2) und (21) eine Folge generieren, die ausschließlich aus Quadratzahlen besteht.

Der Problemschlüssel ist die Beziehung:

$$\left(\tfrac{1}{2}\left(k\pm\sqrt{k^2+4}\right)\right)^2=\tfrac{1}{2}\left(k^2+2+k\sqrt{k^2+4}\right) \tag{38}$$

6.5 Beispiele

Für $k=0$ erhalten wir:

n	a_n	b_n
0	0	0
1	1	1
2	0	0
3	1	1
4	0	0
5	1	1
6	0	0
7	1	1
8	0	0
9	1	1
10	0	0

Tab. 2: *k* = 0

Das Beispiel ist nicht eben umwerfend.

Für k = 1 ergeben sich die Quadrate der Fibonacci-Zahlen (Tab. 3). Einmal mehr sind die Fibonacci-Zahlen das einfachste nichttriviale Beispiel.

Das war auch die Übungsaufgabe.

n	a_n	b_n
0	0	0
1	1	1
2	1	1
3	4	2
4	9	3
5	25	5
6	64	8
7	169	13
8	441	21
9	1156	34
10	3025	55

Tab. 3: Quadrate der Fibonacci-Zahlen

Die Tabelle 1 zeigt die Zahlen für $k = 2$.

Und noch die Tabelle 4 für $k = 3$.

n	a_n	b_n
0	0	0
1	1	1
2	9	3
3	100	10
4	1089	33
5	11881	109
6	129600	360
7	1413721	1189
8	15421329	3927
9	168220900	12970
10	1835008569	42837

Tab. 4: $k = 3$

6.6 Zahlendreiecke

Im Folgenden (39) die ersten 11 Folgenglieder a_n in allgemeiner Form.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
a_1 &= 1\\
a_2 &= k^2\\
a_3 &= k^4 + 2k^2 + 1\\
a_4 &= k^6 + 4k^4 + 4k^2\\
a_5 &= k^8 + 6k^6 + 11k^4 + 6k^2 + 1\\
a_6 &= k^{10} + 8k^8 + 22k^6 + 24k^4 + 9k^2\\
a_7 &= k^{12} + 10k^{10} + 37k^8 + 62k^6 + 46k^4 + 12k^2 + 1\\
a_8 &= k^{14} + 12k^{12} + 56k^{10} + 128k^8 + 148k^6 + 80k^4 + 16k^2\\
a_9 &= k^{16} + 14k^{14} + 79k^{12} + 230k^{10} + 367k^8 + 314k^6 + 130k^4 + 20k^2 + 1\\
a_{10} &= k^{18} + 16k^{16} + 106k^{14} + 376k^{12} + 771k^{10} + 920k^8 + 610k^6 + 200k^4 + 25k^2
\end{aligned} \tag{39}$$

Es entsteht ein Koeffizientendreieck, das sich mir nicht erschließt.
In (40) die ersten 11 Folgenglieder von b_n.

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0\\
b_1 &= 1\\
b_2 &= k\\
b_3 &= k^2 + 1\\
b_4 &= k^3 + 2k\\
b_5 &= k^4 + 3k^2 + 1\\
b_6 &= k^5 + 4k^3 + 3k\\
b_7 &= k^6 + 5k^4 + 6k^2 + 1\\
b_8 &= k^7 + 6k^5 + 10k^3 + 4k\\
b_9 &= k^8 + 7k^6 + 15k^4 + 10k^2 + 1\\
b_{10} &= k^9 + 8k^7 + 21k^5 + 20k^3 + 5k
\end{aligned} \tag{40}$$

Das Koeffizientendreieck ist ein affin verzerrtes Pascal-Dreieck (Binomialkoeffizienten). Die Spalten sind je mit einem zusätzlichen Versatz nach unten verschoben. Die Zeilensummen der Koeffizienten sind nun die Fibonacci-Zahlen.

Wir haben entweder nur gerade oder nur ungerade Exponenten.

Weblink

[1] (2. 5. 2016)
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadrate_ansetzen2/Quadrate_ansetzen2.htm
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadrate_ansetzen2/Quadrate_ansetzen2.pdf