Hans Walser, [20150402]

Quadratzahlen und pythagoreische Dreiecke

1 Worum geht es?

Jeder Quadratzahl $n^2 > 1$ kann mit Hilfe des Höhensatzes ein pythagoreisches Dreieck zugeordnet werden.

2 Beispiele

Für die Beispiele ist eine Fallunterscheidung bezüglich der Parität von n sinnvoll.

2.1 Gerade Quadratzahlen

2.1.1 $n = 2$

Für $n = 2$ verwandeln wir ein aus vier Einheitsquadraten bestehendes Rechteck mit dem Höhensatz in ein Quadrat (Abb. 1).

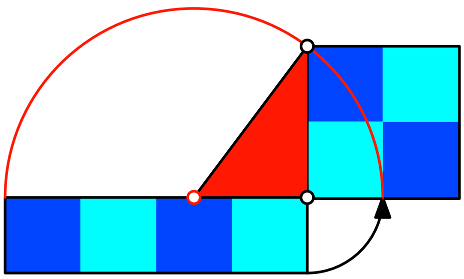

Abb. 1: $n = 2$

Der rote Kreis hat den Radius $\frac{5}{2}$. Dies ist auch die Hypotenuse des rot eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks. Dessen Katheten sind $\frac{3}{2}$ und 2. Wir können also mit dem Faktor 2 erweitern und erhalten das pythagoreische Dreieck mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$. Zu diesem Dreieck gehören die Parameter $u = 2$ und $v = 1$.

2.1.2 $n = 4$

Für $n = 4$ verwandeln wir ein aus 16 Einheitsquadraten bestehendes Rechteck mit dem Höhensatz in ein Quadrat (Abb. 2).

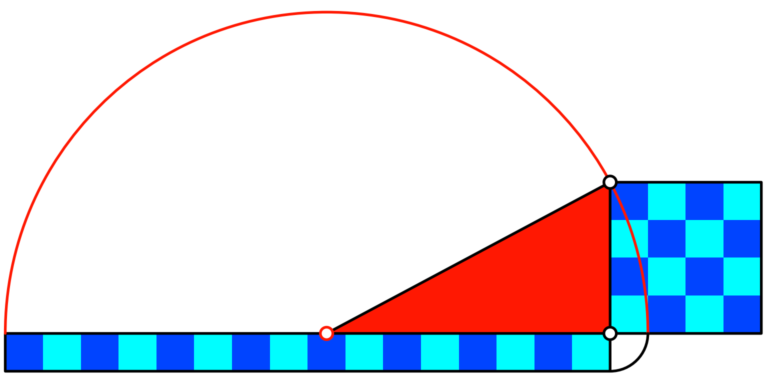

Abb. 2: $n = 4$

Der rote Kreis hat den Radius $\frac{17}{2}$. Dies ist auch die Hypotenuse des rot eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks. Dessen Katheten sind $\frac{15}{2}$ und 4. Wir können also mit dem Faktor 2 erweitern und erhalten das pythagoreische Dreieck mit a = 15, b = 8 und c = 17. Zu diesem Dreieck gehören die Parameter u = 4 und v = 1.

2.1.3 $n = 6$

Für n = 6 verwandeln wir ein aus 36 Einheitsquadraten bestehendes Rechteck mit dem Höhensatz in ein Quadrat. Dies führt zu einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $\frac{37}{2}$ und den Katheten $\frac{35}{2}$ und 6. Wir können also mit dem Faktor 2 erweitern und erhalten das pythagoreische Dreieck mit a = 35, b = 12 und c = 37. Zu diesem Dreieck gehören die Parameter u = 6 und v = 1.

2.1.4 $n = 8$

Für n = 8 verwandeln wir ein aus 64 Einheitsquadraten bestehendes Rechteck mit dem Höhensatz in ein Quadrat. Dies führt zu einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $\frac{65}{2}$ und den Katheten $\frac{63}{2}$ und 8. Wir können also mit dem Faktor 2 erweitern und erhalten das pythagoreische Dreieck mit a = 63, b = 16 und c = 65. Zu diesem Dreieck gehören die Parameter u = 8 und v = 1.

2.1.5 Allgemein

Für gerades n erhalten wir nach Erweitern mit dem Faktor 2 ein rechtwinkliges Dreieck mit $a = n^2 - 1$, $b = 2n$ und $c = n^2 + 1$. Es ist $u = n$ und v = 1.

2.2 Ungerade Quadratzahlen

2.2.1 $n = 3$

Für n = 3 verwandeln wir ein aus neun Einheitsquadraten bestehendes Rechteck mit dem Höhensatz in ein Quadrat (Abb. 3).

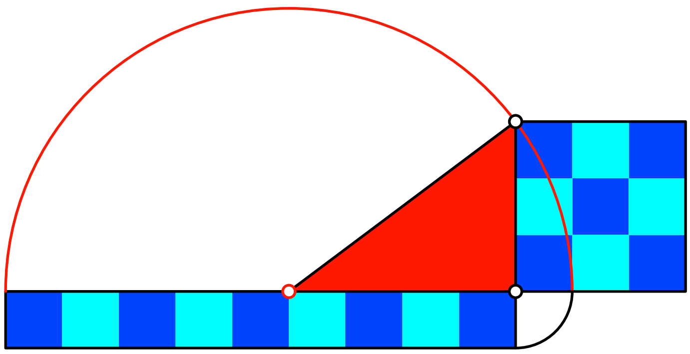

Abb. 3: $n = 3$

Der rote Kreis hat den ganzzahligen Radius 5. Dies ist auch die Hypotenuse des rot eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks. Dessen Katheten sind 4 und 3. In Anlehnung an die üblichen Konventionen bei der Beschriftung pythagoreischer Dreiecke wählen wir die Bezeichnung so, dass a = 3, b = 4 und c = 5. Das Dreieck wir also im negativen Umlaufssinn bezeichnet. Zu diesem Dreieck gehören die Parameter u = 2 und v = 1.

2.2.2 $n = 5$

Für $n = 5$ verwandeln wir ein aus 25 Einheitsquadraten bestehendes Rechteck mit dem Höhensatz in ein Quadrat (Abb. 4).

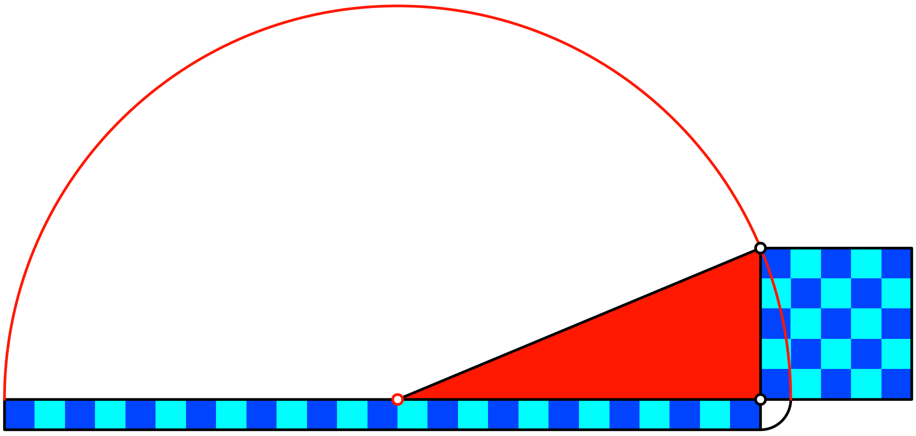

Abb. 4: $n = 5$

Der rote Kreis hat den ganzzahligen Radius 13. Dies ist auch die Hypotenuse des rot eingezeichneten rechtwinkligen Dreiecks. Dessen Katheten sind 12 und 5. In Anlehnung an die üblichen Konventionen bei der Beschriftung pythagoreischer Dreiecke wählen wir die Bezeichnung so, dass $a = 5$, $b = 12$ und $c = 13$. Zu diesem Dreieck gehören die Parameter $u = 3$ und $v = 2$.

2.2.3 $n = 7$

Für $n = 7$ verwandeln wir ein aus 49 Einheitsquadraten bestehendes Rechteck mit dem Höhensatz in ein Quadrat.

Wir erhalten ein pythagoreisches Dreieck mit $a = 7$, $b = 24$ und $c = 25$. Zu diesem Dreieck gehören die Parameter $u = 4$ und $v = 3$.

2.2.4 $n = 9$

Für $n = 9$ verwandeln wir ein aus 81 Einheitsquadraten bestehendes Rechteck mit dem Höhensatz in ein Quadrat.

Wir erhalten ein pythagoreisches Dreieck mit $a = 9$, $b = 40$ und $c = 41$. Zu diesem Dreieck gehören die Parameter $u = 5$ und $v = 4$.

2.2.5 Allgemein

Für ungerades n erhalten wir ein pythagoreisches Dreieck mit $a = n$, $b = \frac{1}{2}\left(n^2 - 1\right)$ und $c = \frac{1}{2}\left(n^2 + 1\right)$. Es ist $u = \frac{1}{2}(n+1)$ und $v = \frac{1}{2}(n-1)$.

3 Fazit

Jeder Quadratzahl $n^2 > 1$ kann mit Hilfe des Höhensatzes ein pythagoreisches Dreieck zugeordnet werden.

Umgekehrt gibt es aber pythagoreische Dreieck die nicht aus dieser Zuordnung entstehen.

Folgende Paare von u- und v-Werten passen in unsere Überlegungen:

u	v	n
2	1	2
2	1	3
4	1	4
3	2	5
6	1	6
4	3	7
8	1	8
5	4	9