Hans Walser, [20170916]

Quadratur des Rechtecks

1 Worum geht es

Durch einen iterierten Flächenverdoppelungsprozess nähert sich ein Rechteck einem Quadrat an.

2 Erinnerung

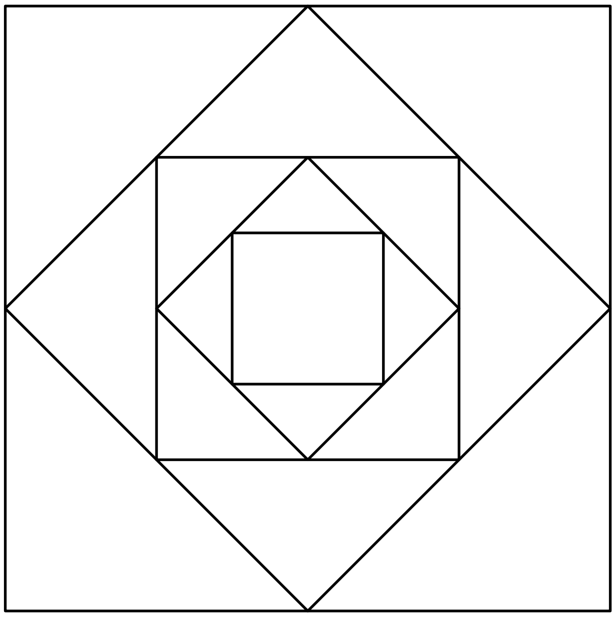

Abb. 1: Erinnerung

3 Verdoppelungsschritt im Rechteck

Wir umschreiben dem Rechteck ein zweites Rechteck, dessen Seiten parallel beziehungsweise orthogonal zu einer Diagonale des Ausgangsrechtecks sind (Abb. 2).

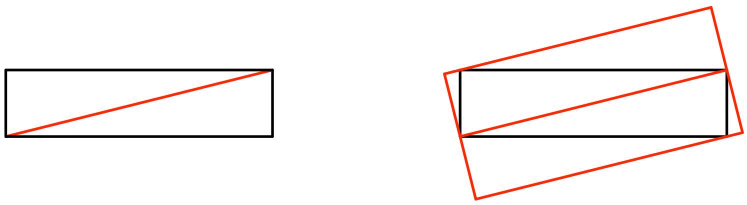

Abb. 2: Das neue Rechteck

Dabei wird der Flächeninhalt verdoppelt, wie die Zerlegung der Abbildung 3 zeigt.

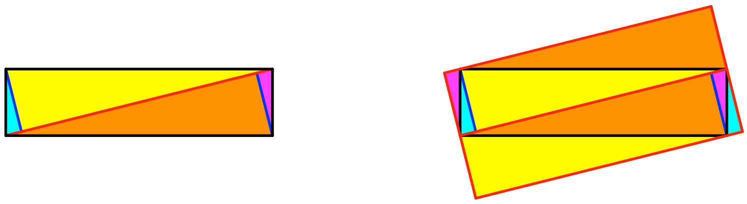

Abb. 3: Flächenverdoppelung

4 Iteration

Wir iterieren den Verdoppelungsschritt.
Die Abbildung 4 zeigt nochmals das Ergebnis des ersten Schrittes.

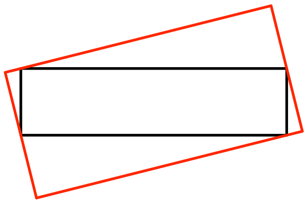

Abb. 4: Erster Schritt

Die Abbildungen 5 bis 8 zeigen die folgenden Schritte.

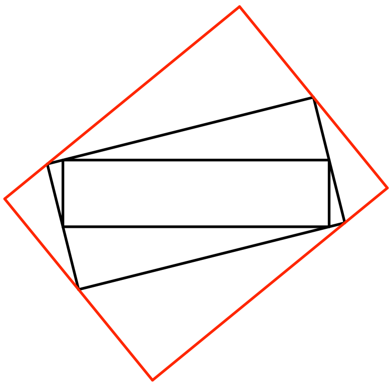

Abb. 5: Zweiter Schritt

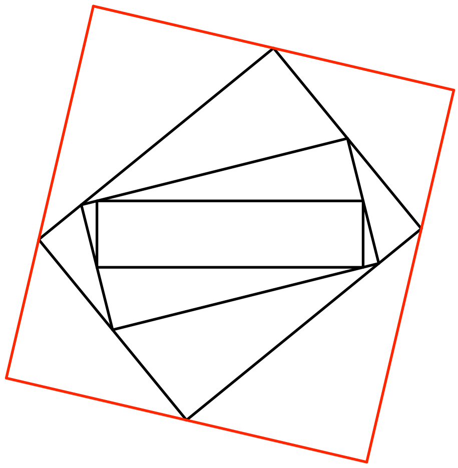

Abb. 6: Dritter Schritt

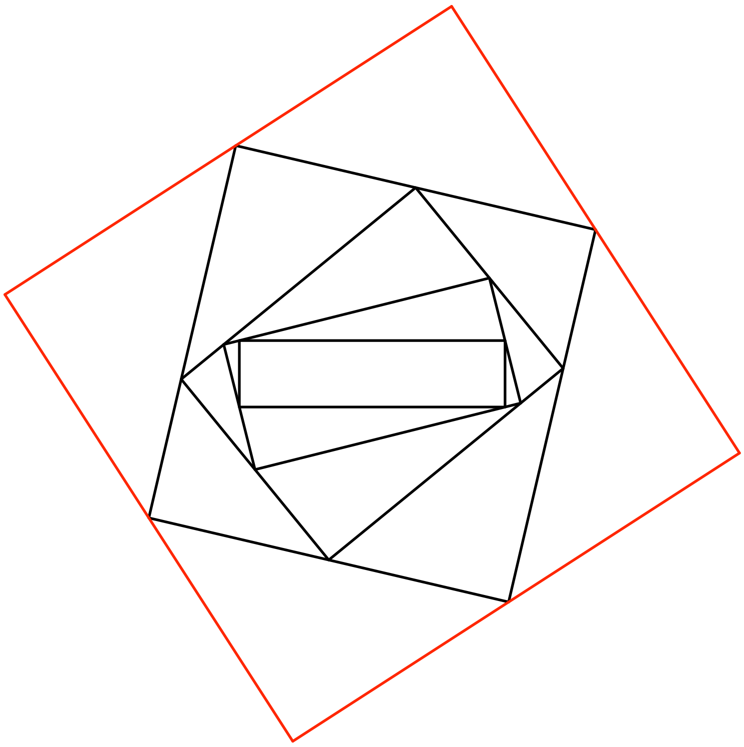

Abb. 7: Vierter Schritt

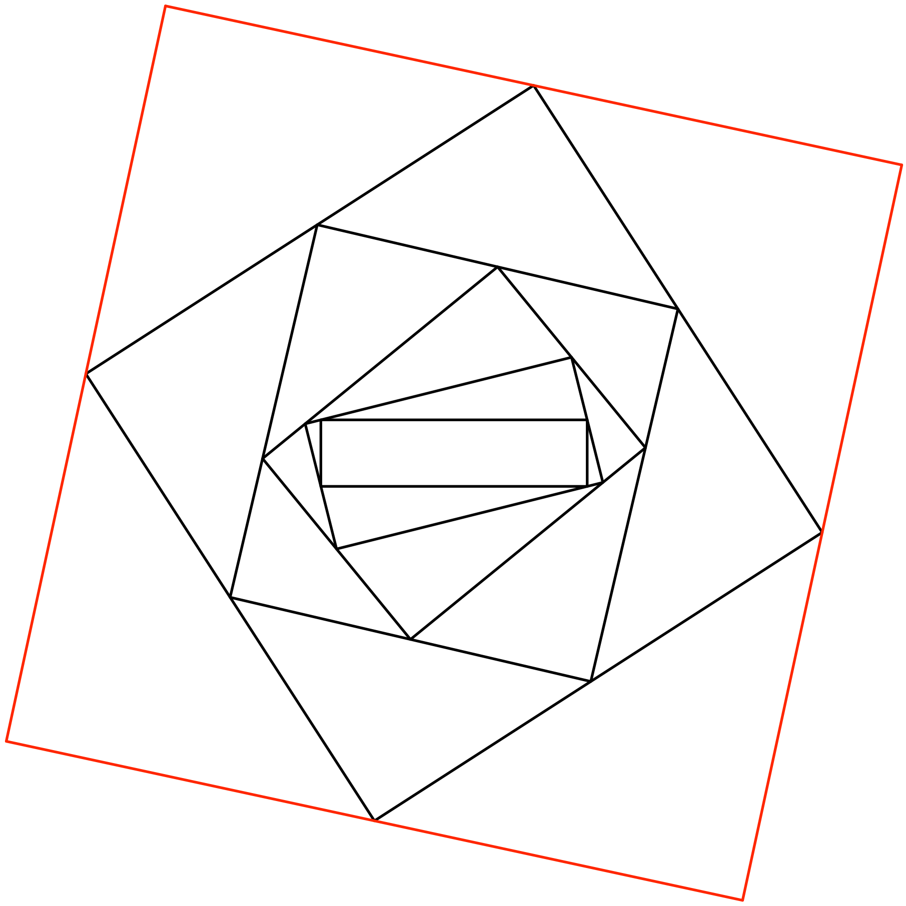

Abb. 8: Fünfter Schritt

Wir sehen, dass sich die Rechtecke immer mehr einem Quadrat annähern.

5 Beweis

5.1 Iterationsgleichungen

Wir verwenden für den Iterationsschritt die Bezeichnungen der Abbildung 9. Dabei soll $a_n \geq b_n$ sein.

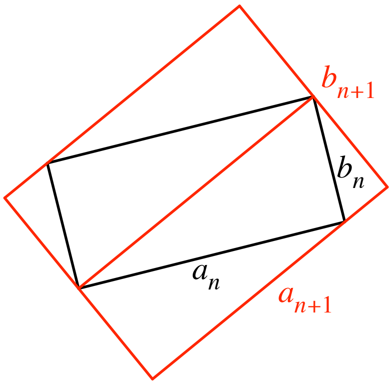

Abb. 9: Bezeichnungen

Damit erhalten wir die Iterationsgleichungen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ b_{n+1} &= 2\frac{a_n b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} \end{aligned} \tag{1}$$

Im rechtwinkligen Dreieck ist die halbe Hypotenuse größer oder gleich der zur Hypotenuse gehörenden Höhe. Daher ist $a_{n+1} \geq b_{n+1}$.

Weiter bezeichnen wir mit λ_n das Seitenverhältnis im Rechteck:

$$\lambda_n = \frac{a_n}{b_n} \tag{2}$$

Wir haben zu zeigen:

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 1 \tag{3}$$

5.2 Iteration des Seitenverhältnisses

Aus (2) folgt $a_n = \lambda_n b_n$ und damit:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = b_n \sqrt{\lambda_n^2 + 1} \\ b_{n+1} &= 2\frac{a_n b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = 2\frac{\lambda_n b_n^2}{b_n\sqrt{\lambda_n^2+1}} = 2b_n \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2+1}} \end{aligned} \tag{4}$$

Für das neue Seitenverhältnis erhalten wir:

$$\lambda_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_n\sqrt{\lambda_n^2+1}}{2b_n\frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2+1}}} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_n^2+1}{\lambda_n} = \frac{1}{2}\left(\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}\right) \tag{5}$$

In unserem Beispiel der Abbildungen 2 bis 8 ist der Startwert $\lambda_0 = 4$. Damit erhalten wir die Werte der Tabelle 1.

n	λ_n
0	4
1	2.125000000
2	1.297794118
3	1.034166181
4	1.000564381
5	1.000000159

Tab. 1: Seitenverhältnisse

In unserem Beispiel konvergieren die Seitenverhältnisse sehr rasch gegen 1.
Gilt das auch allgemein?
Wir besprechen zwei Vorgehensweisen.

5.2.1 Fixpunktverfahren

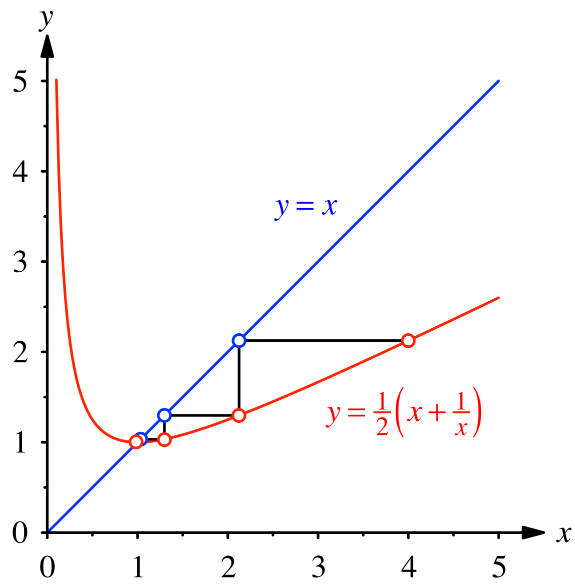

Abb. 10

Die Abbildung 10 illustriert die Situation mit dem Fixpunktverfahren. Der Punkt (1,1) ist ein attraktiver Fixpunkt. Bei einem beliebigen Startwert geht es treppab zu diesem Punkt. Daher ist der gesuchte Limes 1.

5.2.2 Heron und Newton-Raphson

Die positive Nullstelle der Funktion

$$y = f(x) = x^2 - r \tag{6}$$

ist die Quadratwurzel aus r. Nach dem Verfahren von Newton-Raphson erhalten wir die Iteration:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - r}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{r}{x_n}\right) \tag{7}$$

Mit einem beliebigen Startwert können wir damit die Quadratwurzel aus r approximieren. Das Verfahren wird auch als Verfahren von Heron bezeichnet.

Wir sehen, dass (5) der Sonderfall für $r = 1$ von (7) darstellt.

Der gesuchte Limes ist also die Quadratwurzel aus 1, somit 1.