

Hans Walser, [20150440]

Quadratunterteilung

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

Die Abbildung 1 zeigt das unterteilte Quadrat.

Es ist eine infinite Unterteilung.

Wie groß sind die einzelnen Farbanteile?

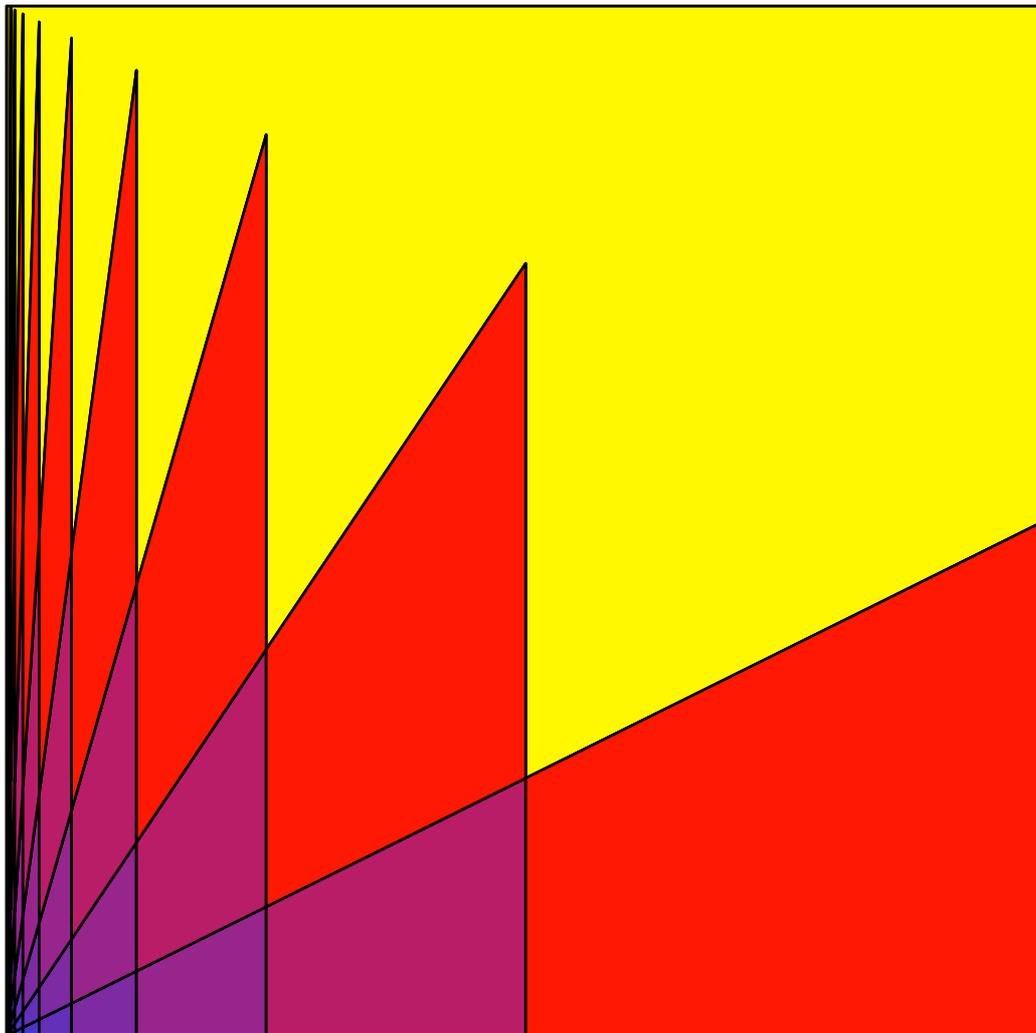


Abb. 1: Unterteiltes Quadrat

Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

lassen sich die Farbanteile rechnerisch bestimmen.

Es geht aber auch mit geometrischen Überlegungen.

In der Abbildung 2 ist ein schräger Streifen eingezeichnet. Der Flächeninhalt des Streifens ist die Hälfte der Quadratfläche. Innerhalb des Streifens gibt es zu jedem roten Dreieck ein flächengleiches gelbes Dreieck. Der rote und auch der gelbe Flächenanteil innerhalb des Streifens sind also je ein Viertel der Quadratfläche.

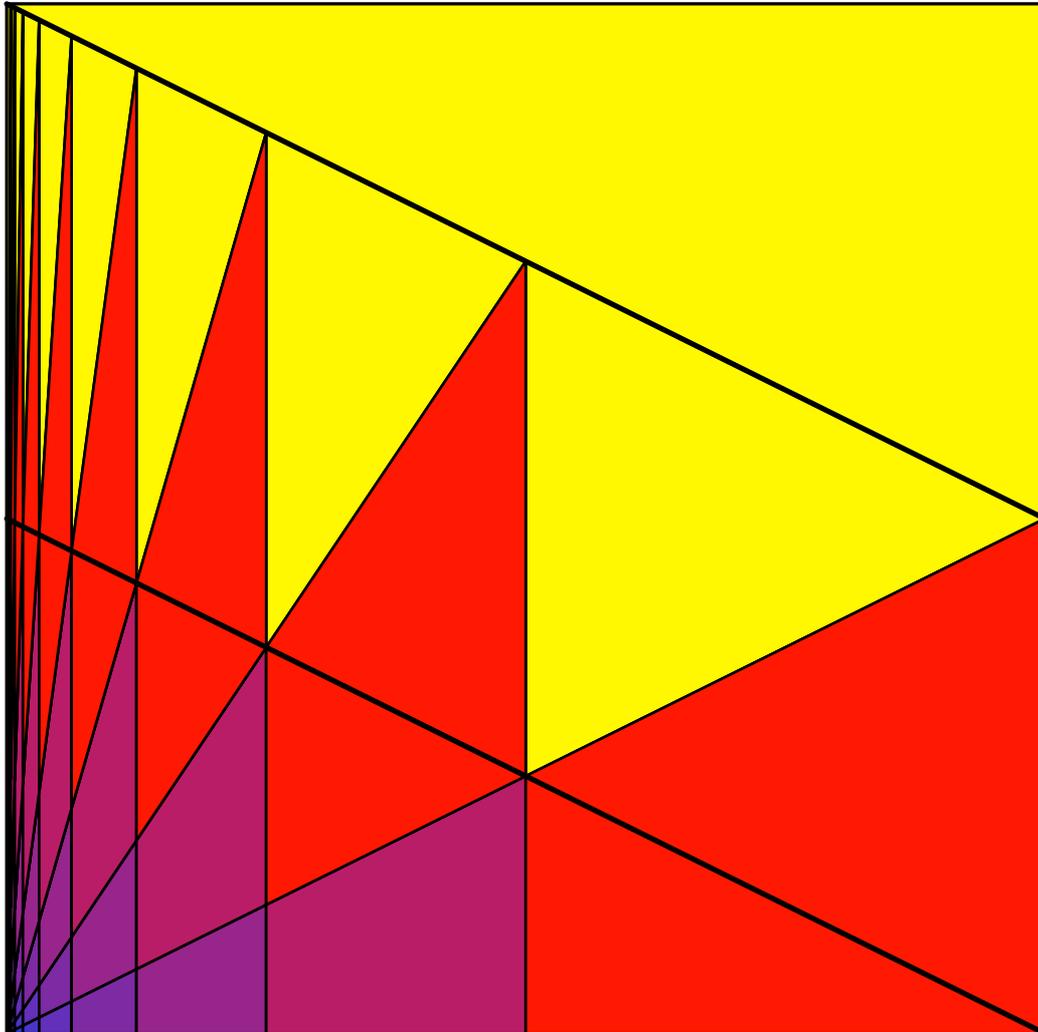


Abb. 2: Schräger Streifen

Das gelbe Dreieck oberhalb des Streifens hat auch einen Viertel der Quadratfläche. Somit ist der gelbe Anteil genau die Hälfte der Quadratfläche. Der nicht gelbe Anteil macht also insgesamt die andere Hälfte der Quadratfläche aus.

Nun arbeiten wir mit dem Viertelquadrat links unten (Abb. 3). Dieses Viertelquadrat ist im Wesentlichen eine Kopie des Ausgangsquadrates.

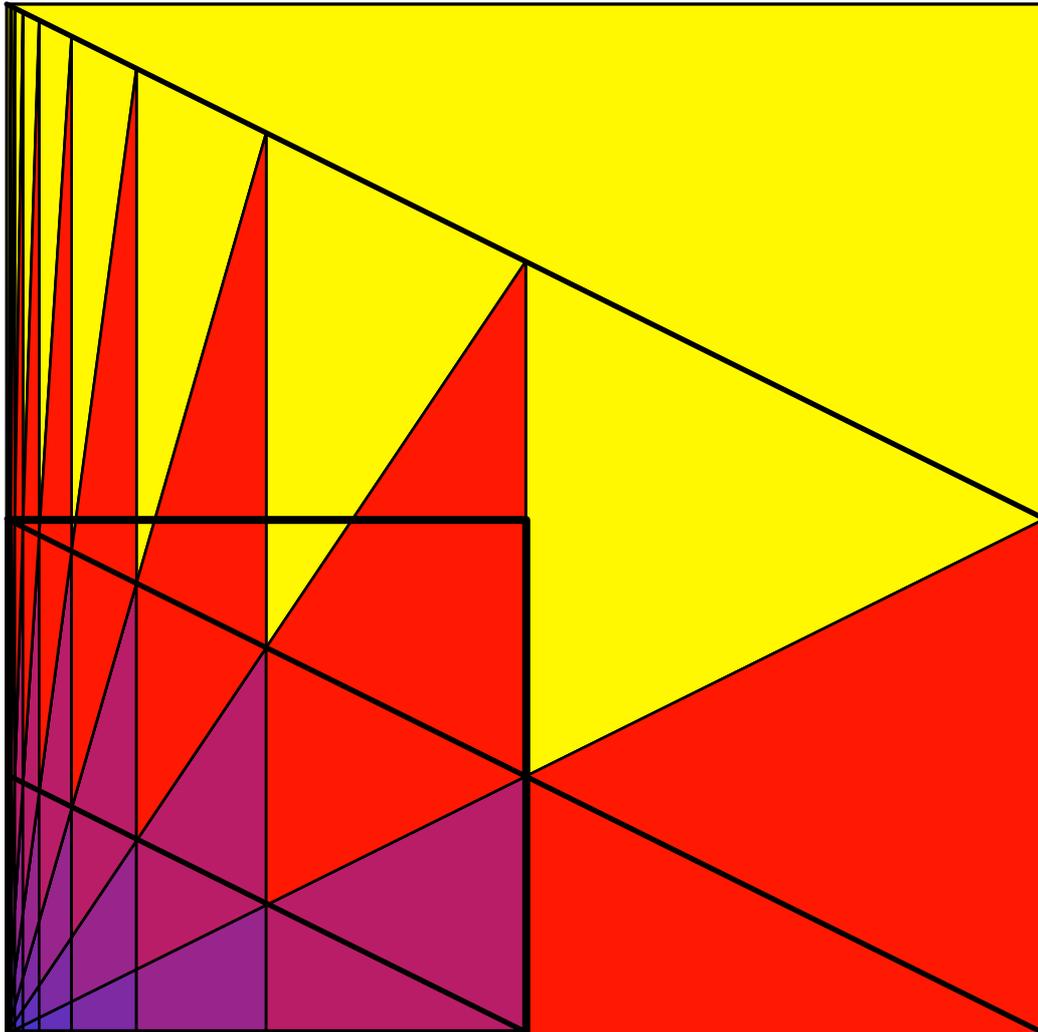


Abb. 3: Viertelquadrat

Im schrägen Streifen in diesem Viertelquadrat macht der rote Anteil einen Viertel der Viertelquadratfläche aus also $\frac{1}{16}$ der ursprünglichen Quadratfläche. Das rote rechtwinklige Dreieck unten rechts ist ebenfalls $\frac{1}{16}$ der ursprünglichen Quadratfläche. Somit erhalten wir für den gesamten roten Anteil $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$ der ursprünglichen Quadratfläche.

Der anschließende magenta Anteil ist eine längenmäßig halbierte Kopie des roten Anteils und daher flächenmäßig $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$ der ursprünglichen Quadratfläche.

So geht das weiter.

Kontrolle für den nicht gelben Anteil: $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{8} + \dots = \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$