Hans Walser, [20160631]

Quadratsummen-Spirale

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

1 Worum geht es?

Wir zeichnen mit rechtwinkligen Dreiecken eine eckige Spirale gemäß Abbildung 1. Die roten Katheten haben der Reihe nach die Längen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

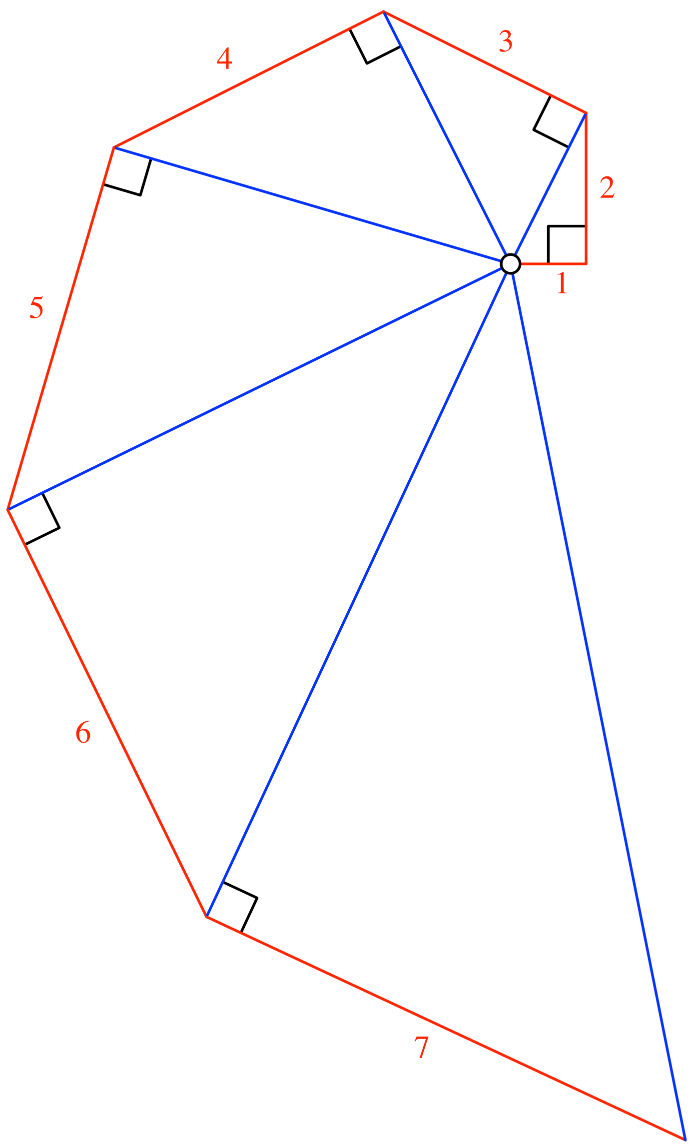

Abb. 1: Die ersten sieben Schritte

Die Abbildung 2 zeigt die ersten 200 Schritte. Was für eine Spirale ist das?

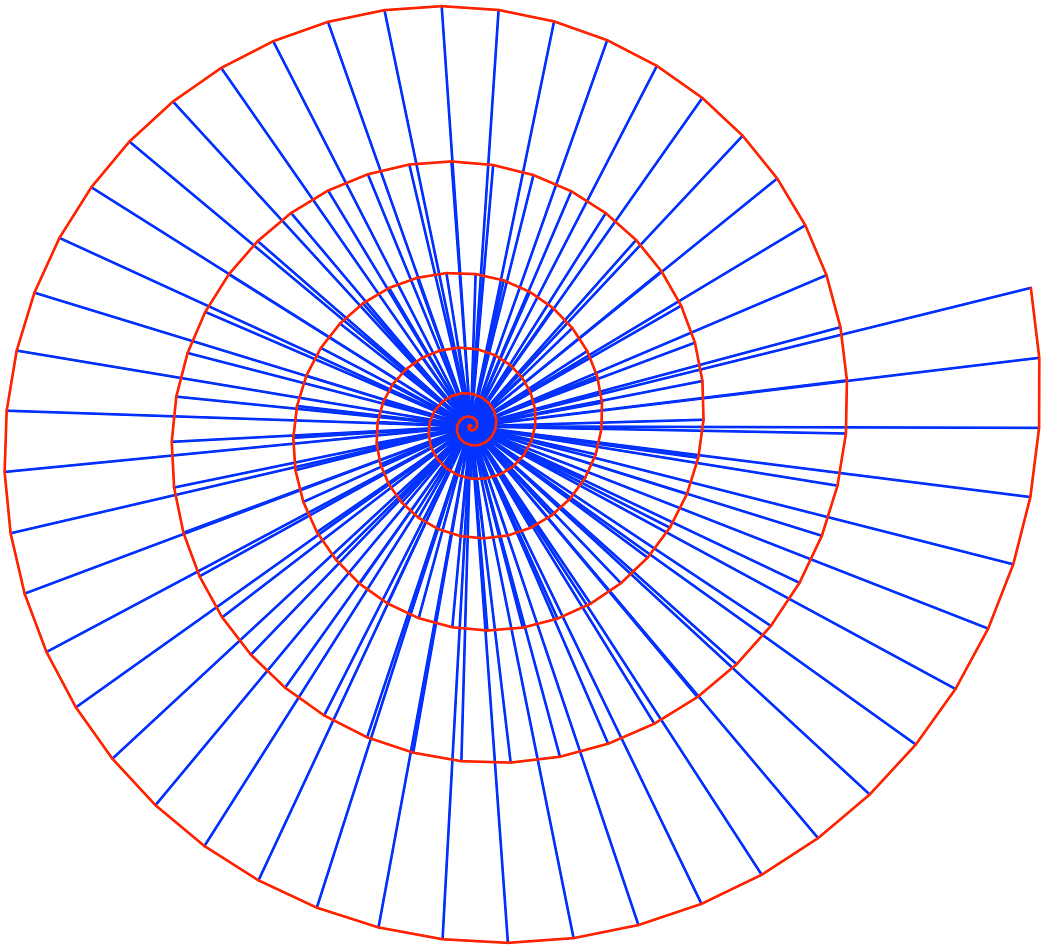

Abb. 2: Spirale

Eine archimedische Spirale kann es nicht sein, da die Abstände zwischen den Spiralendurchgängen wachsen.

Für eine logarithmische Spirale wachsen aber diese Abstände zu wenig rasch.

2 Speichenlängen

Wir berechnen die blauen Speichenlängen r_n (Abb. 3, Tab. 1)

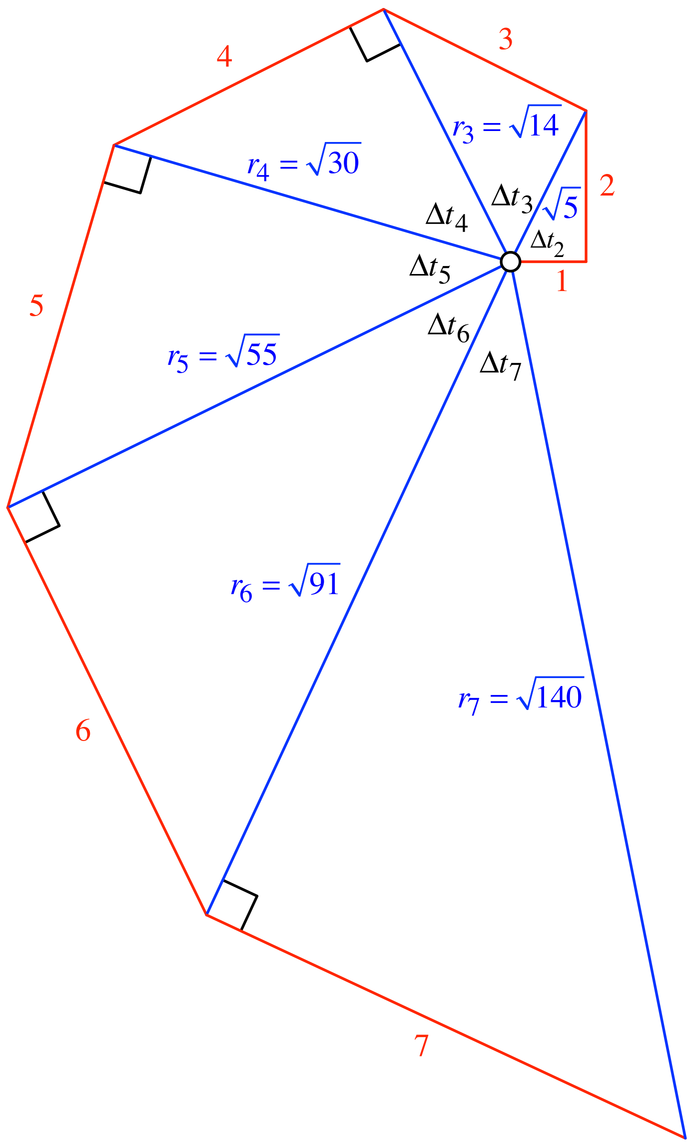

Abb. 3: Speichenlängen

n	r_n	Radikand
1	$\sqrt{1}$	$1 = 1^2$
2	$\sqrt{5}$	$5 = 1^2 + 2^2$
3	$\sqrt{14}$	$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$
4	$\sqrt{30}$	$30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

Tab. 1: Speichenlängen

Es ist:

$$r_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \sqrt{\tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)} \tag{1}$$

Daher der Name „Quadratsummen-Spirale“.

3 Typ der Spirale

Mit Δt_n bezeichnen wir den spitzen Winkel der rechtwinkligen Dreiecke im Zentrum (Abb. 3). Es ist:

$$\Delta t_n = \arctan\left(\tfrac{n}{r_{n-1}}\right) \tag{2}$$

Nun überlegen wir, was „janz weit außen“, also für große n geschieht. Zunächst ist:

$$r_n \approx \sqrt{\tfrac{1}{3} n^3} = \tfrac{1}{\sqrt{3}} n^{\frac{3}{2}} \tag{3}$$

Weiter ist:

$$\Delta t_n \approx \tfrac{n}{r_{n-1}} \approx \sqrt{3}\, n^{-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Wir betrachten nun n als reelle Variable und berechnen den Polarwinkel t in Abhängigkeit von n.

$$t(n) = \sum_{k=2}^{n} \Delta t_k \approx \int_1^n \sqrt{3}\, k^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}k = 2\sqrt{3}\, n^{\frac{1}{2}} + C \tag{5}$$

Somit ist:

$$n^{\frac{1}{2}} \approx \frac{t(n) - C}{2\sqrt{3}} \tag{6}$$

Dies setzen wir in (3) ein:

$$r(n) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} n^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(n^{\frac{1}{2}} \right)^3 \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{t(n) - C}{2\sqrt{3}} \right)^3 \tag{7}$$

Unsere Spirale ist also im Wesentlichen vom Typ:

$$r(t) = a(t - b)^3 \tag{8}$$

Es handelt sich um eine kubische Spirale.

Leider lässt sich die kubische Spirale nicht so leicht manipulieren wie die logarithmische Spirale. Insbesondere hat die kubische Spirale keine Drehstrecksymmetrie.

In den beiden folgenden Abbildungen sind die Parameter a und b jeweils so gewählt worden, dass die kubische Spirale (magenta) durch die beiden letzten Eckpunkte der roten eckigen Spirale verläuft. Für die übrigen Eckpunkte der roten Spirale gilt die kubische Spirale nur näherungsweise.

In der Abbildung 4 sind die ersten sieben Schritte gezeichnet.

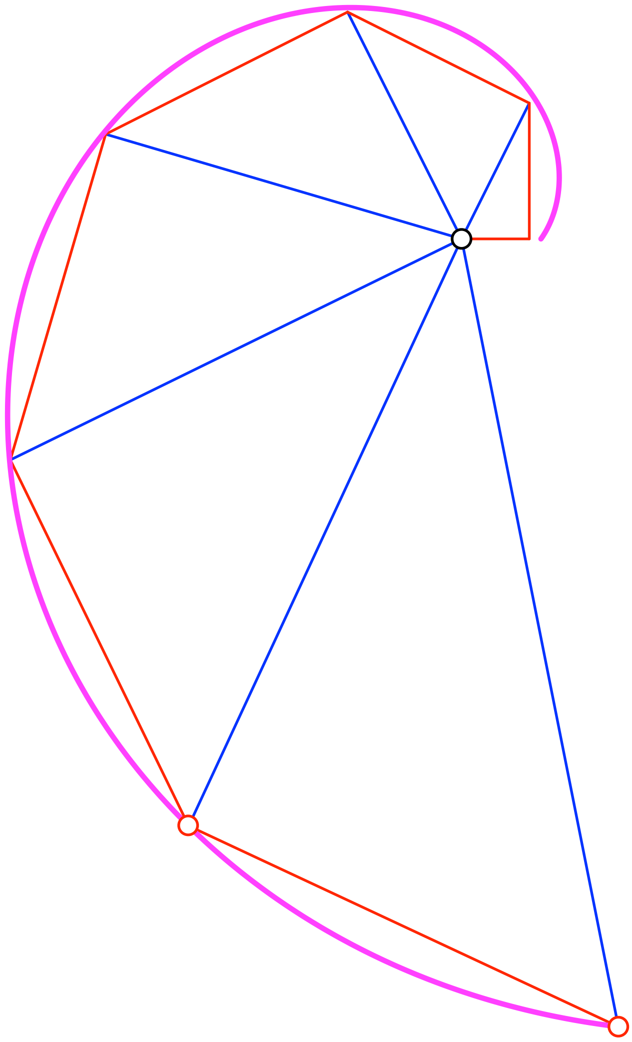

Abb. 4: Die ersten sieben Schritte

Die Abbildung 5 zeigt die ersten 200 Schritte mit der kubischen Spirale. Die Approximation ist so gut, dass die ursprüngliche eckige Spirale zugedeckt wird.

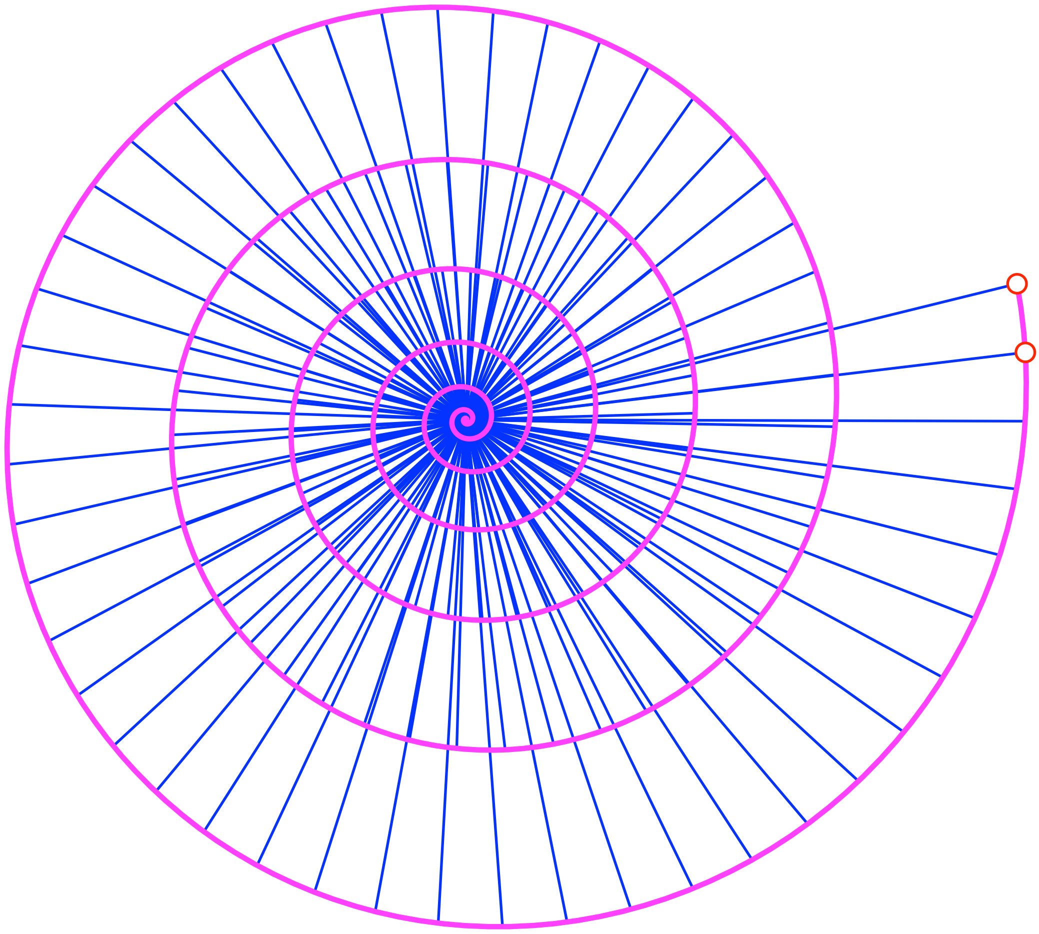

Abb. 5: Spiralen