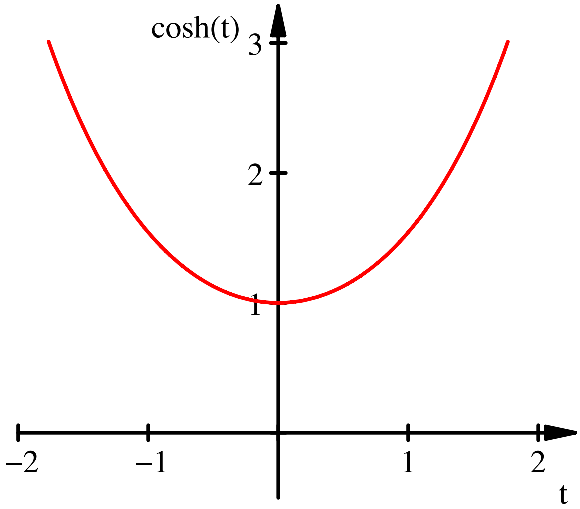
Hans Walser, [20070407a], [20131218]

Quadratisches Rad

Anregung: T. U. – C. S.

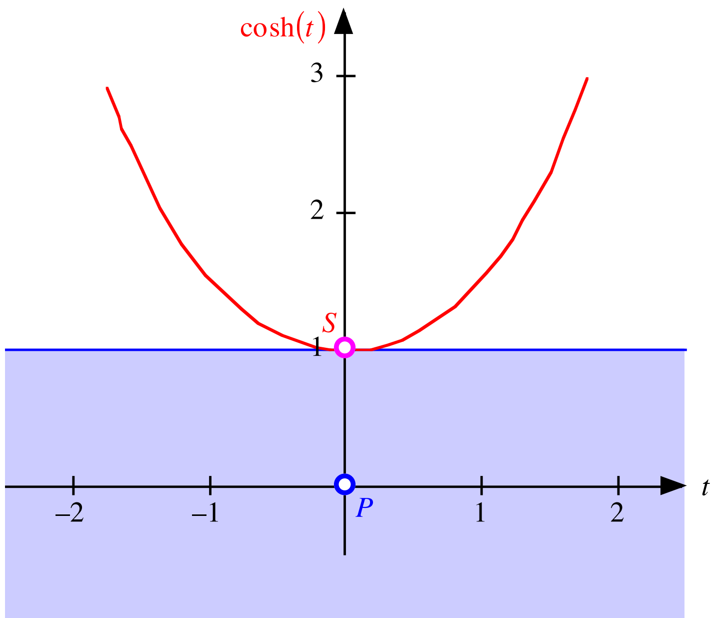
1 Die Kettenlinie

Der Funktionsgraph von $\cosh(t)$ wird als *Kettenlinie* bezeichnet, weil eine durchhängende Kette diese Form annimmt.



Kettenlinie

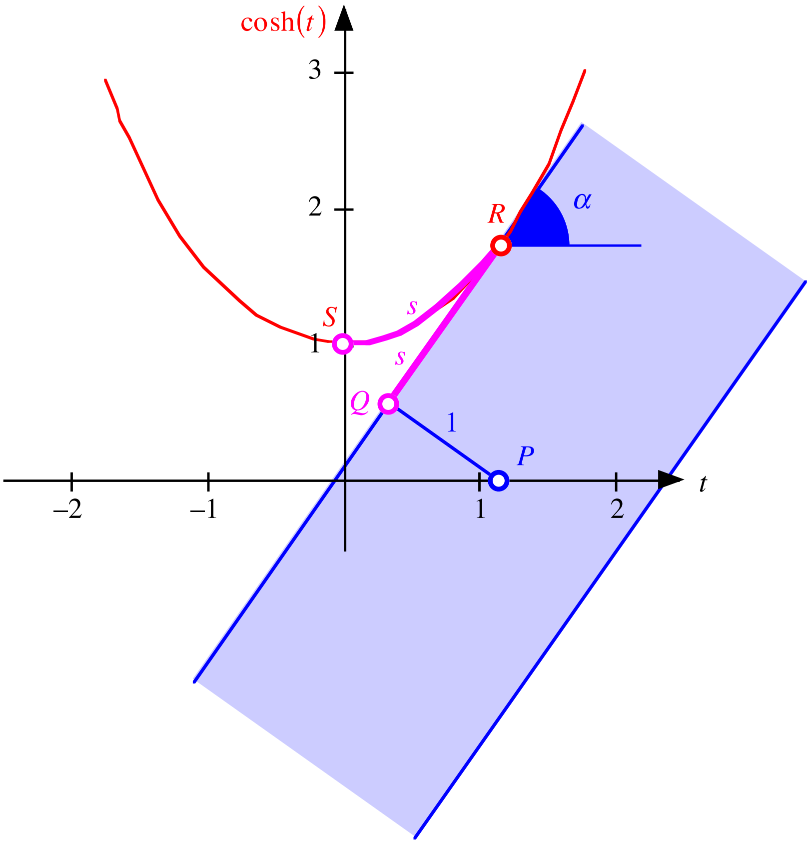
Wir denken uns nun ein Lineal, das im Abstand 1 unterhalb der Oberkante einen Punkt P enthält, und legen dieses Lineal so an den Scheitel S der Kettenlinie an, dass der Punkt P senkrecht unter den Scheitel S zu liegen kommt.



Anlegen des Lineals

Dann liegt der Punkt P natürlich im Ursprung.

Nun wälzen wir das Lineal auf der Kettenlinie ab und studieren die Bewegung des Punktes P.



Abgewälztes Lineal

Die Figur suggeriert, dass P senkrecht unterhalb des Berührungspunktes R auf der horizontalen Achse liegt. Dies ist auch richtig:

Der Punkt R habe die Darstellung:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \cosh(t) \\ t \end{bmatrix}$$

Für die abgewälzte Länge s erhalten wir:

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cosh(\tau)\right)^2}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \cosh(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sinh(t)$$

Für den Steigungswinkel α gilt:

$$\tan(\alpha) = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cosh(t) = \sinh(t)$$

Daraus ergibt sich:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(t)}} = \frac{1}{\cosh(t)}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} = \frac{\sinh(t)}{\sqrt{1+\sinh^2(t)}} = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{s}{\cosh(t)}$$

Somit hat der Punkt P die Darstellung:

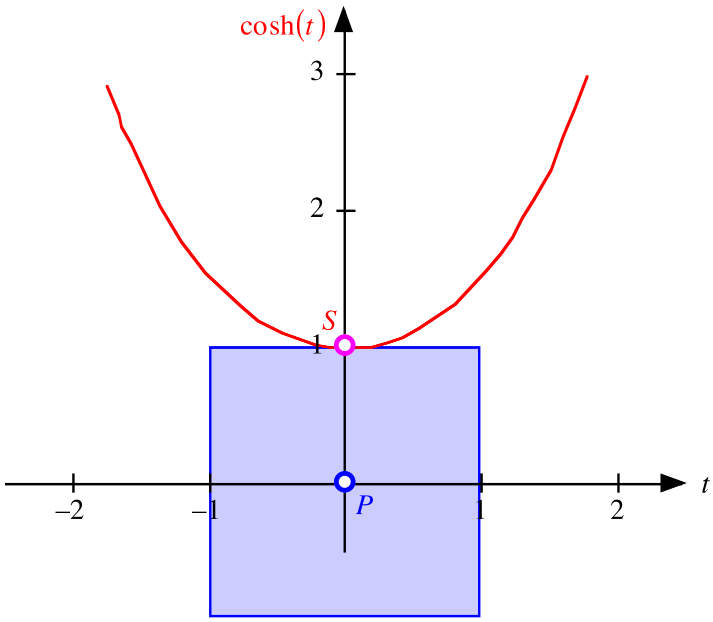
$$\vec{p}(t) = \begin{bmatrix} t - s\cos(\alpha) + \sin(\alpha) \\ \cosh(t) - s\sin(\alpha) - \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - \frac{s}{\cosh(t)} + \frac{s}{\cosh(t)} \\ \cosh(t) - \frac{s^2}{\cosh(t)} - \frac{1}{\cosh(t)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t \\ \cosh(t) - \frac{s^2+1}{\cosh(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \cosh(t) - \frac{\sinh^2(t)+1}{\cosh(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \cosh(t) - \frac{\cosh^2(t)}{\cosh(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

Damit liegt der Punkt P senkrecht unterhalb des Berührungspunktes R auf der horizontalen Achse. Wir haben eine so genannte *Geradführung*.

2 Das quadratische Rad

Wir ersetzen den Streifen durch ein Quadrat der Seitenlänge 2 mit P als Mittelpunkt.

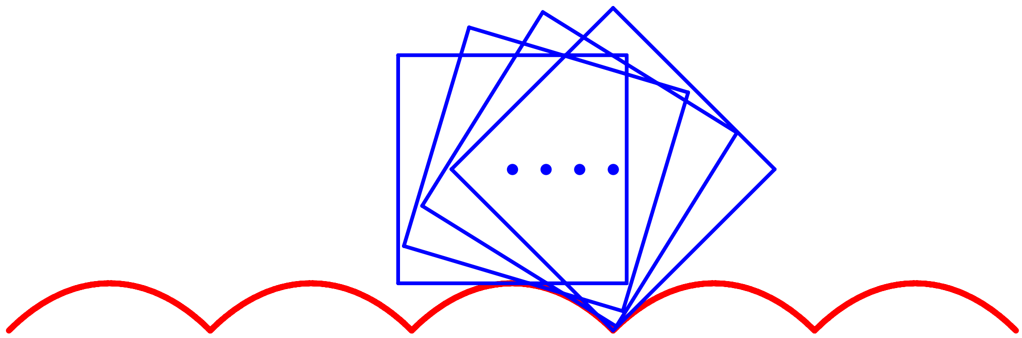


Quadratisches Rad

Dieses können wir nun so lange abwälzen, bis die rechte obere Ecke auf der Kettenlinie liegt. Dann ist $s = 1$. Für den zugehörigen t-Wert t_0 ergibt sich wegen $s = \sinh(t)$:

$$t_0 = \operatorname{arcsinh}(1) \approx 0.88137358702$$

An dieser Stelle setzen wir nun einen weiteren Kettelinienbogen an. Bei der nächsten Quadratecke verfahren wir wieder so. Damit erhalten wir eine Girlande von Kettenlinienbögen. Wenn wir schließlich noch an der horizontalen Achse spiegeln, ergibt sich eine Trasse, auf welchem das quadratische Rad völlig horizontal abrollen kann.



Trasse für das quadratische Rad

Nach vier Umdrehungen ist das Rad wieder in gleicher Lage, weil der volle Umfang 8 abgewälzt worden ist. Damit ergibt sich die Periodenlänge p:

$$p = 8t_0 = 8\operatorname{arcsinh}(1) \approx 7.05098869616$$

3 Das dreieckige Rad?

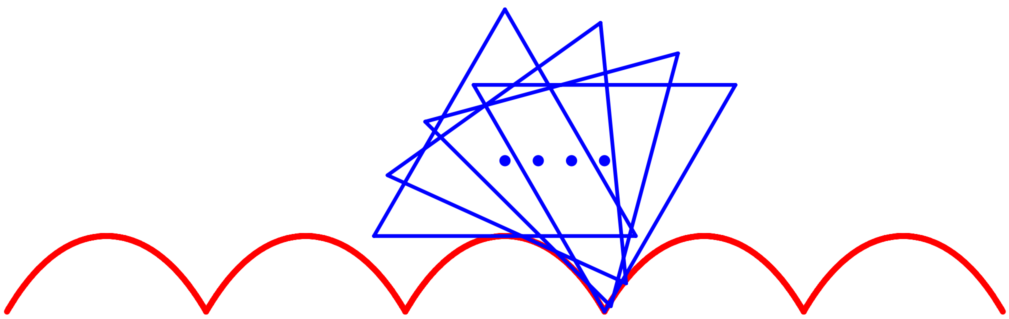
Analog scheint es für ein gleichseitiges Dreieck mit Innenkreisradius 1 zu funktionieren. Die halbe Seitenlänge ist dann $s = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \approx 1.73205080758$. Wir erhalten

$$t_0 = \operatorname{arcsinh}\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \approx 1.31695789693$$

und die Periodenlänge p.

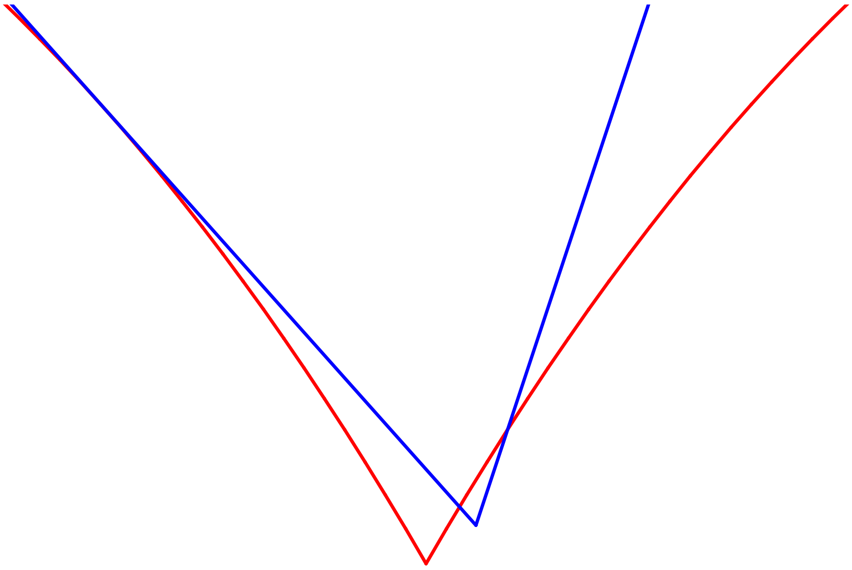
$$p = 6t_0 = 6\operatorname{arcsinh}\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \approx 7.90174738159$$

Die Trasse sieht so aus:



Trasse für dreieckiges Rad?

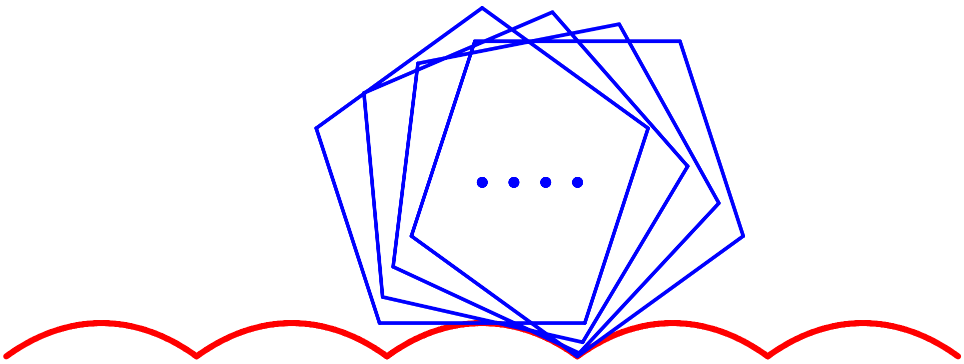
Das funktioniert jetzt allerdings leider nicht. Eine Dreiecksecke nähert sich orthogonal der Trasse und hebt auch wieder orthogonal zur Trasse ab. In der Trasse habe wir aber dort einen Winkel von nur 60°, so dass das Dreieck einhakt. Das folgende Bild zeigt die Situation stark vergrößert.



Dreieck hakt ein

4 Regelmäßiges *n*-Eck

Allgemein geht es aber für ein regelmäßiges n-Eck mit $n \geq 4$ und Innenkreisradius 1.



Regelmäßiges Fünfeck

Die halbe Seitenlänge dann $s = \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Weiter ist $t_0 = \operatorname{arcsinh}\left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ und für die Periodenlänge p ergibt sich $p = 2n t_0 = 2n \operatorname{arcsinh}\left(\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$.

5 Das Rad wird neu erfunden

Für $n \to \infty$ wird das Rad rund und die Periodenlänge $p = 2\pi$. Es gilt daher:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \left(n \operatorname{arcsinh}\left(\tan\left(\tfrac{\pi}{n} \right) \right) \right)$$

Schauen wir das einmal an:

n	n*arcsinh(tan(PI/n))
3	3.9508736908
4	3.5254943481
5	3.3713773881
6	3.2958368660
7	3.2526986741
8	3.2255977533
9	3.2074065425
10	3.1945825948
100	3.1421095524
1000	3.1415978213
10000	3.1415927053
100000	3.1415926541

Umwerfend ist das allerdings nicht. Für $n \to \infty$ wird $\frac{\pi}{n}$ klein und beide beteiligten Funktionen können liniearisiert werden. Dann kürzt sich das n heraus und es bleibt π übrig.