Hans Walser, [20220624]

Quadratische Gleichung

1 Worum geht es?

Grafische Lösung einer quadratischen Gleichung.

2 Die quadratische Gleichung

Wir bearbeiten die quadratische Gleichung in der Form (sogenannte *p*-*q*-Formel):

$$x^2 + px + q = 0$$

Die formelmäßige Lösung ist:

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{p^2 - 4q}$$

3 Grafisches Vorgehen

In einem kartesischen Koordinatensystem schneiden wir den Thaleskreis k über den Punkten $(-p, q)$ und $(0, 1)$ mit der x-Achse (Abb. 1). Die x-Koordinaten der Schnittpunkte sind die Lösungen der quadratischen Gleichung.

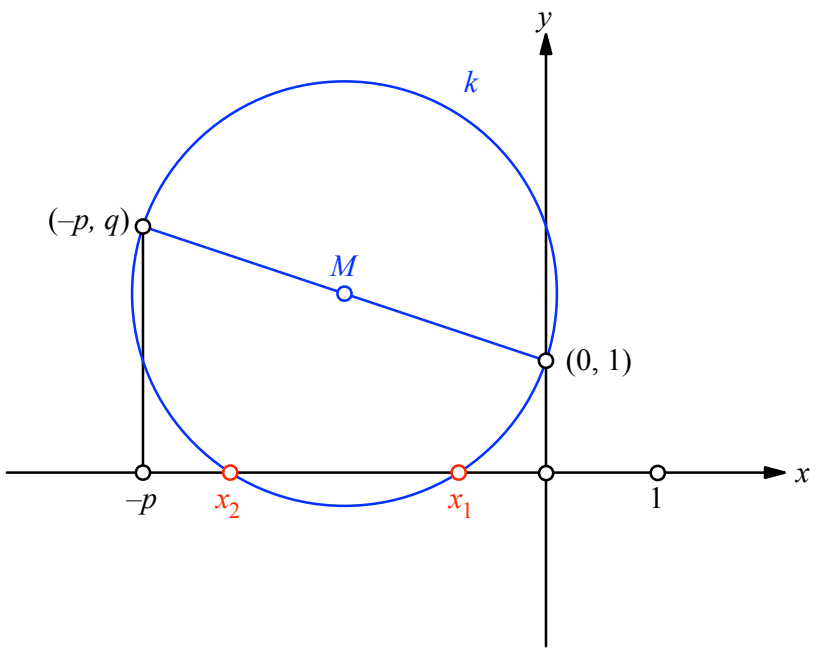

Abb. 1: Grafisches Vorgehen

4 Nachweis

Der Nachweis geschieht rechnerisch.

4.1 Nachweis mit Kreisgleichung

Der Thaleskreis k hat den Mittelpunkt M und den Radius r:

$$M\left(-\frac{p}{2}, \frac{1+q}{2}\right), \quad r^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{(1-q)^2}{4}$$

Daraus ergibt sich für den Thaleskreis k die Kreisgleichung:

$$k: \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1+q}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{(1-q)^2}{4}$$

Diese Kreisgleichung lässt sich umformen zu:

$$k: \quad x^2 + px + y^2 - (1+q)y + q = 0$$

Beim Schnitt mit der x-Achse ist $y = 0$. Von der Kreisgleichung bleibt übrig:

$$x^2 + px + q = 0$$

Dies ist aber unsere quadratische Gleichung.

4.2 Nachweis mit Pythagoras

Wir berechnen x_1 mit Hilfe des gelben rechtwinkligen Dreiecks.

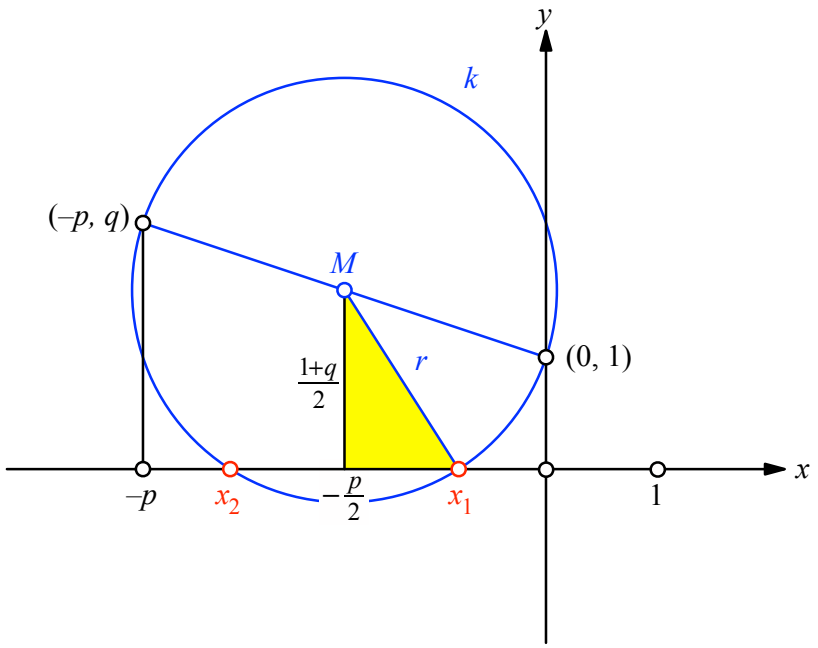

Abb. 2: Nachweis mit Pythagoras

Es ist:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{1+q}{2}\right)^2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{(1-q)^2}{4} - \left(\frac{1+q}{2}\right)^2}$$

$$= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$$

Dies entspricht der Lösung gemäß der p-q-Formel. Für x_2 entsprechend.

Weblinks

Hans Walser: Grafische Lösung einer quadratischen Gleichung
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadratische_Gleichung/Quadratische_Gleichung.htm
Hans Walser: Quadratische Ergänzung
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadr_Ergaenzung/Quadr_Ergaenzung.htm