

Hans Walser, [20160434]

Quadrate ansetzen

1 Worum geht es?

Einem beliebigen Vieleck setzen wir an den Seiten Quadrate an. Dann wiederholen wir das Quadrate-Ansetzen. Es entstehen Flächenverhältnisse, die mit den Fibonacci-Zahlen zu tun haben (Posamentier and Lehmann 2007), (Walser 2012).

2 Beispiel

Wir arbeiten exemplarisch mit einem Dreieck. Erste Runde

Einem beliebigen schwarzen Dreieck setzen wir an den Seiten rote Quadrate an (Abb. 1). Das sind wir von der Pythagoras-Ikone her gewohnt, aber in unserem Fall braucht das Dreieck *nicht* rechtwinklig zu sein.

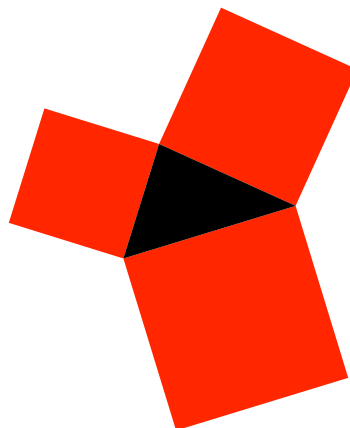


Abb. 1: Rote Quadrate

Mit s_1 bezeichnen wir die Flächensumme der drei roten Quadrate.

2.1 Zweite Runde

Nun setzen wir einen Kranz von grünen Quadraten an gemäß Abbildung 2.

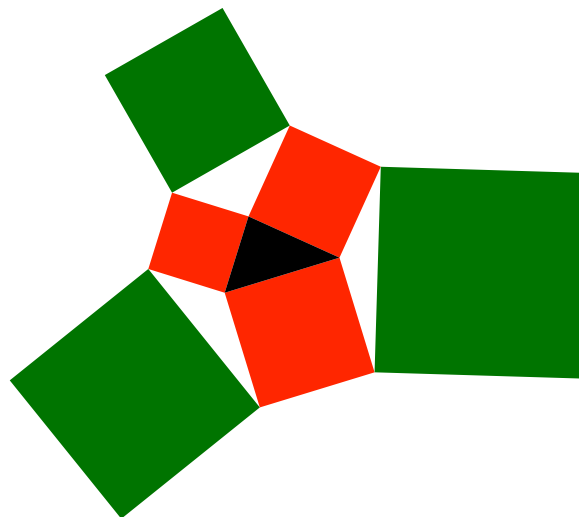


Abb. 2: Kranz von grünen Quadraten

Mit s_2 bezeichnen wir die Flächensumme der drei grünen Quadrate.

2.2 Blaue Runde

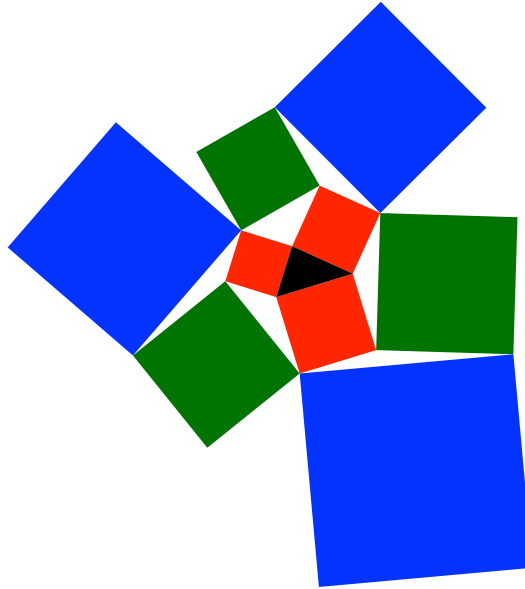


Abb. 3: Kranz von blauen Quadraten

Die blauen Quadrate basieren je auf einer Ecke eines grünen und eines roten Quadrates. Wir greifen also auf die zwei vorangehenden Quadratkränze zurück. Das erinnert an die Rekursion der Fibonacci-Zahlen.

Mit s_3 bezeichnen wir die Flächensumme der drei blauen Quadrate.

2.3 Himmelblaue Runde

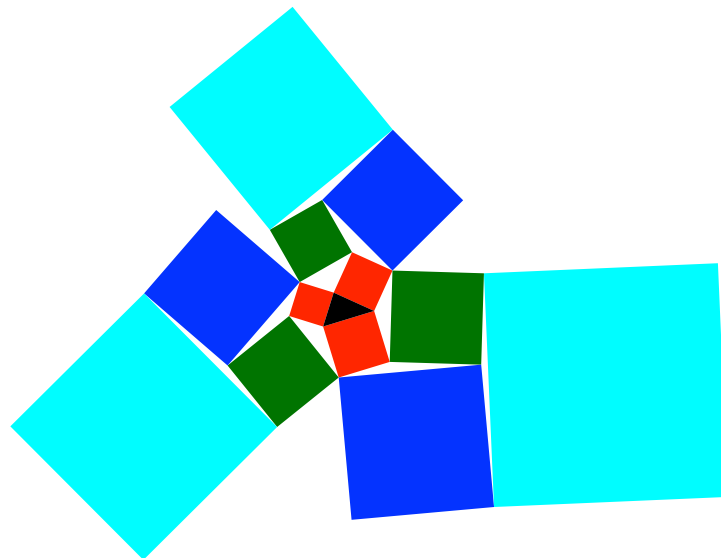


Abb. 4: Himmelblaue Runde

Die himmelblauen Quadrate basieren wiederum je auf einer Ecke der beiden vorangehenden Quadratkränze.

Mit s_4 bezeichnen wir die Flächensumme der drei himmelblauen Quadrate.

2.4 Magenta

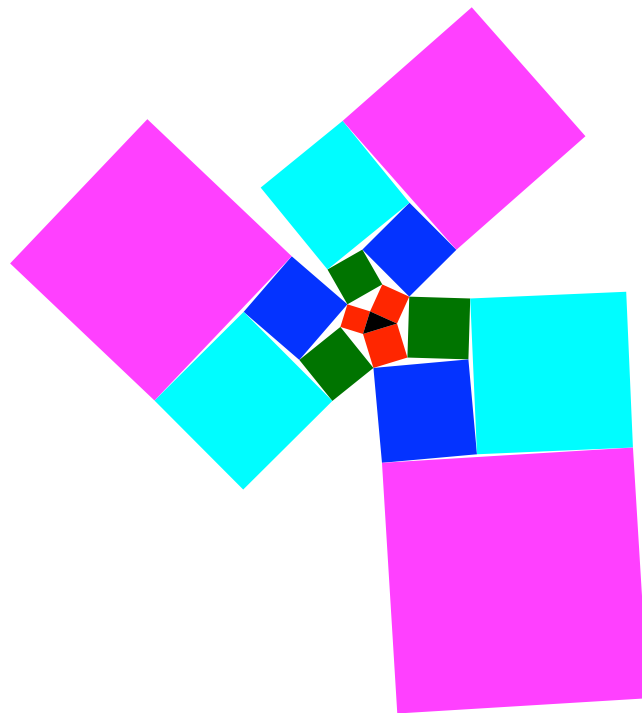


Abb. 5: Magenta Runde

Mit s_5 bezeichnen wir die Flächensumme der drei magenta Quadrate.

2.5 Goldgelb

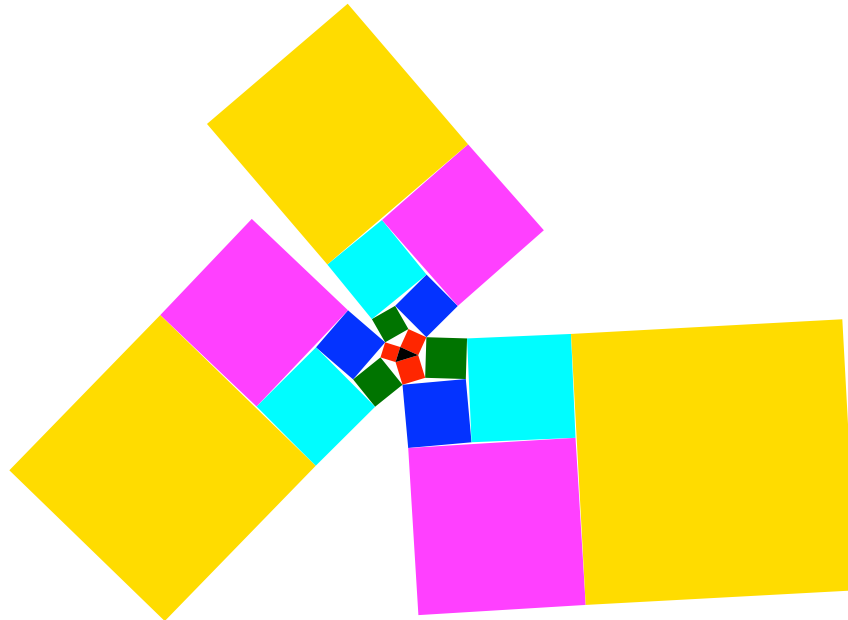


Abb. 6: Goldgelbe Runde

3 Flächenverhältnis

Wir erhalten experimentell unabhängig von der Form des schwarzen Basisdreieckes das Flächenverhältnis:

$$s_1 : s_2 : s_3 : s_4 : s_5 : s_6 = 1 : 3 : 7 : 19 : 49 : 129 \quad (1)$$

Somit stellen sich zwei Fragen:

Wie lassen sich diese experimentellen Befunde beweisen?

Was hat es mit der Zahlenfolge 1, 3, 7, 19, 49, 129, ... auf sich?

4 Beweis

Für den Beweis arbeiten wir mit einem Hilfssatz, dem Max-und-Moritz-Theorem.

4.1 Das Max-und-Moritz-Theorem

Wir beginnen mit zwei Quadraten (blau in Abb. 7), die an einer Ecke gelenkig verbunden sind. Dann fügen wir zwei weitere Quadrate an (rot in Abb. 7).

In dieser Situation gilt das Max-und-Moritz-Theorem:

$$\text{rot} = \text{zwei mal blau} \quad (2)$$

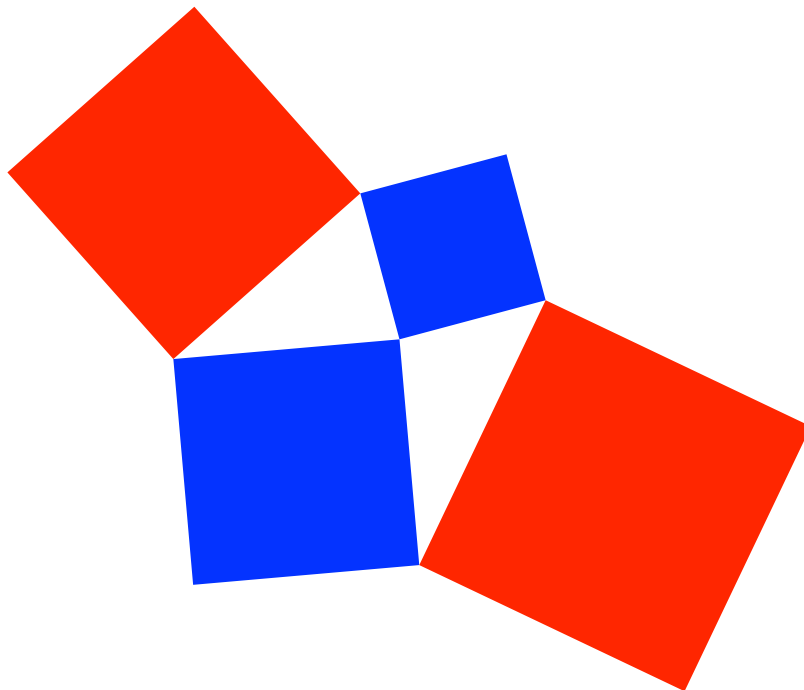
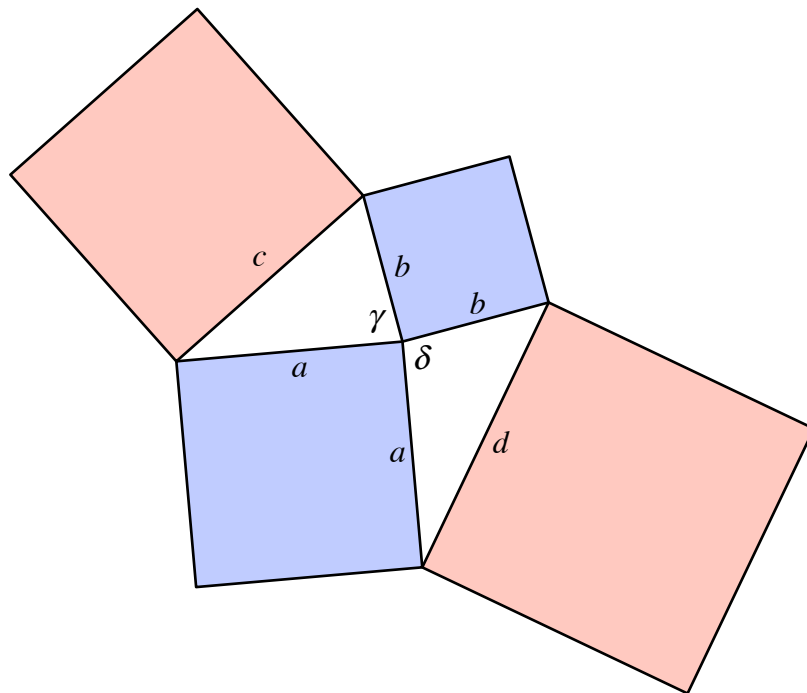


Abb. 7: rot = zwei mal blau

Für den Beweis arbeiten wir mit den Bezeichnungen der Abbildung 8.

**Abb. 8: Bezeichnungen**

Die Winkel γ und δ ergänzen sich auf 180° . Daher ist:

$$\cos(\delta) = -\cos(\gamma) \quad (3)$$

Aus dem Kosinus-Satz ergibt sich:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \\ d^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\delta) \end{aligned} \quad (4)$$

Wegen (3) ergibt sich durch Addition der beiden Zeilen von (4):

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2) \quad (5)$$

Damit ist das Max-und-Moritz-Theorem bewiesen. Es wird im Folgenden andauernd verwendet.

Noch eine neckische Zusatzbemerkung (Abb. 9). Das Lot auf die eine rote Quadratseite halbiert die andere rote Quadratseite (und umgekehrt). Beweis? Dieser Sachverhalt wird

im Folgenden nur zur Präzisierung der Relation *gegenüberliegende Quadrate* verwendet.

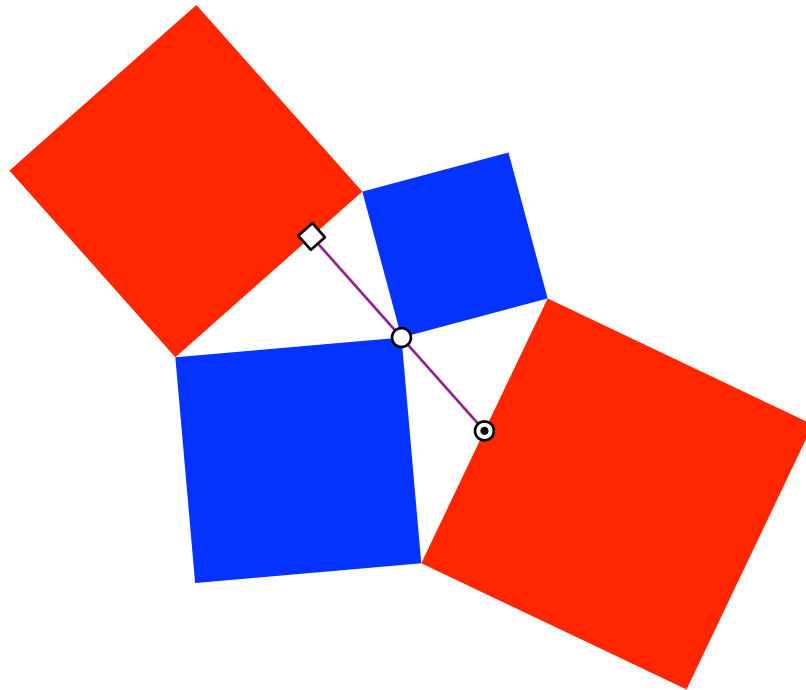


Abb. 9: Lot und Seitenhalbierende

Nun zurück zu unserem Dreieck.

4.2 Grüne Runde

Aus der Disposition der Abbildung 2 ergibt sich aus dem Max-und-Moritz-Theorem, dass jedes grüne Quadrat zusammen mit dem gegenüberliegenden roten Quadrat jeweils flächengleich ist wie das Doppelte der beiden benachbarten Quadrate. Aufsummieren ergibt:

$$s_2 + s_1 = 2(s_1 + s_1) \Rightarrow s_2 = 3s_1 \quad (6)$$

Damit ist das erste Verhältnis von (1) abgehakt.

4.3 Blaue Runde

Gemäß Abbildung 3 ist jedes blaue Quadrat zusammen mit dem gegenüberliegenden roten Quadrat flächenmäßig doppelt so groß wie das grüne und das rote Quadrat, die eine gemeinsame Ecke auf dem Lot haben.

Aufsummieren ergibt daher:

$$s_3 + s_1 = 2 \underbrace{s_2}_{3s_1} + 2s_1 \Rightarrow s_3 = 7s_1 \quad (7)$$

Damit ist das zweite Verhältnis von (1) abgehakt.

4.4 Himmelblaue Runde

Gemäß Abbildung 4 ist jedes himmelblaue Quadrat zusammen mit dem gegenüberliegenden roten Quadrat flächenmäßig doppelt so groß wie das anschließende blaue und grüne Quadrat. Somit nach dem Max-und-Moritz-Theorem und Aufsummieren:

$$s_4 + s_1 = 2 \underbrace{s_3}_{7s_1} + 2 \underbrace{s_2}_{3s_1} \Rightarrow s_4 = 19s_1 \quad (8)$$

5 Rekursion

Die himmelblaue Runde ist bereits typisch für alle folgenden Runden. Für $n > 2$ gilt:

$$s_{n+1} + s_{n-2} = 2s_n + 2s_{n-1} \quad (9)$$

Damit haben wir die Rekursionsformel für unsere Folge s_n gefunden:

$$s_{n+1} = 2s_n + 2s_{n-1} - s_{n-2} \quad (10)$$

Im Unterschied zur Fibonacci-Rekursion brauchen wir die drei vorangehenden Folgenglieder und daher auch drei Startwerte.

Die Tabelle 1 zeigt die ersten 20 Folgenglieder.

n	s_n	n	s_n
1	1	11	15841
2	3	12	41473
3	7	13	108577
4	19	14	284259
5	49	15	744199
6	129	16	1948339
7	337	17	5100817
8	883	18	13354113
9	2311	19	34961521
10	6051	20	91530451

Tab. 1: Folgenglieder

Die Folge hat die explizite Formel (übliche Herleitung):

$$s_n = \frac{2}{5} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{2}{5} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{5} (-1)^n \quad (11)$$

Mit der Schreibweise des Goldenen Schnittes (Posamentier and Lehmann 2012), (Walser 2013)

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad (12)$$

kann die explizite Form geschrieben werden wie folgt:

$$s_n = \frac{2}{5} \Phi^{2n} + \frac{2}{5} \Phi^{-2n} + \frac{1}{5} (-1)^n \quad (13)$$

6 Die Fibonacci-Packung

Die Abbildung 10 zeigt die Fibonacci-Packung.



Abb. 10: Fibonacci-Packung

Die Quadrate haben der Reihe nach die Seitenlängen:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \quad (14)$$

Das sind die Fibonacci-Zahlen. Die Quadrate haben daher der Reihe nach die Flächeninhalte:

$$1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, \dots \quad (15)$$

Diese Folge hat ebenfalls die Rekursion (10) wie unsere Folge s_n .

In der Abbildung 6 erkennen wir dreimal näherungsweise diese Fibonacci-Packung. Die drei Packungen haben aber die roten Startquadrate gemeinsam.

7 Andere Vielecke

Die Abbildungen 11 und 12 zeigen das analoge Vorgehen basierend auf einem beliebigen Viereck oder Siebeneck. Dabei ergeben sich Überlappungen der Quadrate.

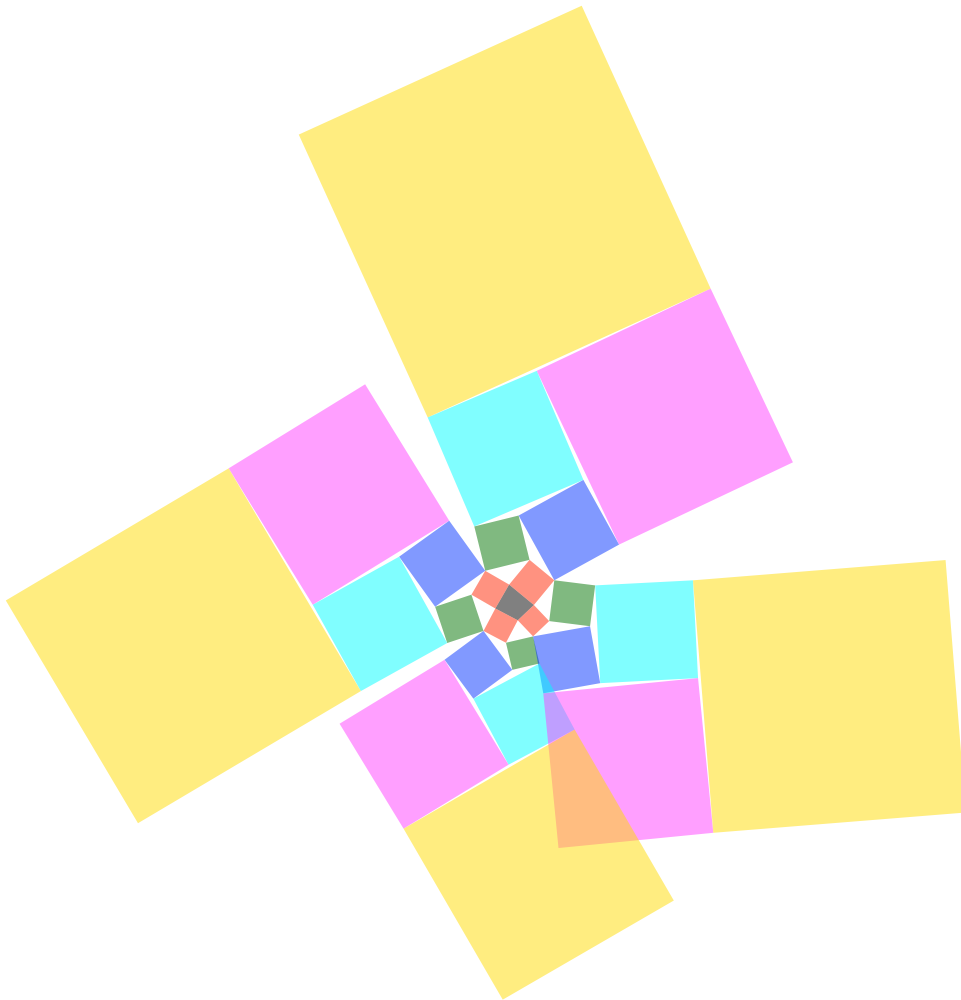


Abb. 11: Viereck als Ausgangsfigur

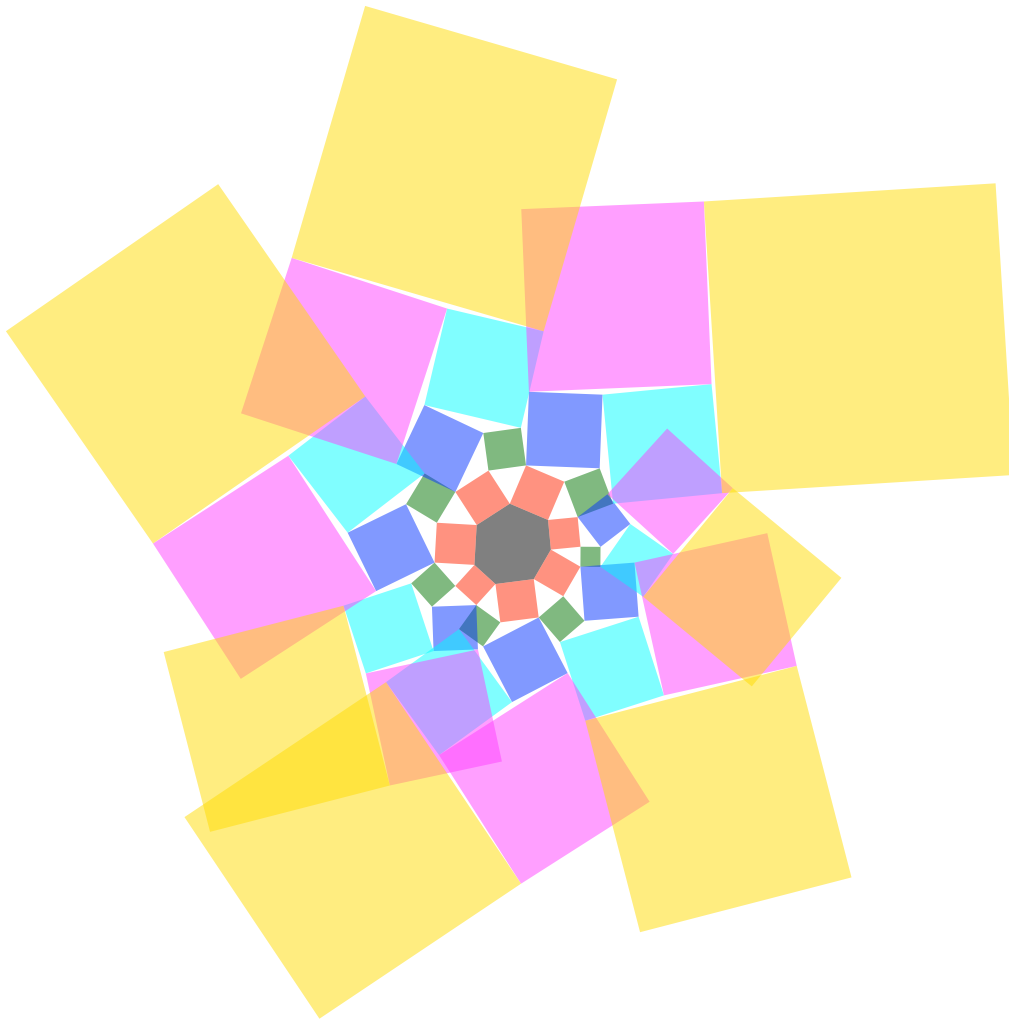


Abb. 12: Siebeneck als Ausgangsfigur

Wir erkennen wiederum die näherungsweise Fibonacci-Packungen.

Die Flächensummen haben ebenfalls die Rekursion (10), aber andere Startwerte. Die Startwerte sind nicht mehr so schön wie im Falle eines Dreiecks als Startfigur.

Literatur

Posamentier, Alfred S. and Lehmann, Ingmar (2007): *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*. Amherst, N.Y., Prometheus Books.

Posamentier, Alfred S. and Lehmann, Ingmar (2012): *The Glorious Golden Ratio*. Amherst, N.Y., Prometheus Books.

Walser, Hans (2012): *Fibonacci. Zahlen und Figuren*. Leipzig, EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-60-8.

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.