Hans Walser, [20140424]

# *p,q*-Matrix

Anregung: R. S., C.

## 1 Worum geht es?

Für $0 < p < 1$ und $q = 1 - p$ untersuchen wir die Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

Die Matrix hat die Zeilensummen und Spaltensummen 1. Sie ist also ein Sonderfall einer stochastischen Matrix.

Es entsteht ein Link zur Binomialverteilung.

## 2 Daten

Determinante:

$$\det(A) = p^2 - q^2 = \underbrace{(p+q)}_{1}(p-q) = p - q$$

Eigenwerte und Eigenvektoren:

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 2p\lambda + (p-q) = 0$$

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = p + q = 1, \quad \lambda_2 = p - q = \det(A)$$

Bemerkung: Jede stochastische Matrix hat einen Eigenwert 1.

Eigenvektoren:

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Die Matrix $A$ ist symmetrisch. Bei jeder symmetrischen Matrix sind die Eigenvektoren orthogonal.

## 3 Beispiel

Wir wählen $p = \frac{2}{3}$, also:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \det(A) = \frac{1}{3}$$

Potenzen der Matrix und Umformung:

Matrix:

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{6} & \frac{1}{2}-\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6} & \frac{1}{2}+\frac{1}{6} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{3} & 1-\frac{1}{3} \\ 1-\frac{1}{3} & 1+\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\det(A) & 1-\det(A) \\ 1-\det(A) & 1+\det(A) \end{bmatrix}$$

Quadrat der Matrix:

$$A^2=\begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{18} & \frac{1}{2}-\frac{1}{18} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{18} & \frac{1}{2}+\frac{1}{18} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{9} & 1-\frac{1}{9} \\ 1-\frac{1}{9} & 1+\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\left(\det(A)\right)^2 & 1-\left(\det(A)\right)^2 \\ 1-\left(\det(A)\right)^2 & 1+\left(\det(A)\right)^2 \end{bmatrix}$$

Dritte Potenz:

$$A^3=\begin{bmatrix} \frac{14}{27} & \frac{13}{27} \\ \frac{13}{27} & \frac{14}{27} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{54} & \frac{1}{2}-\frac{1}{54} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{54} & \frac{1}{2}+\frac{1}{54} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{27} & 1-\frac{1}{27} \\ 1-\frac{1}{27} & 1+27 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\left(\det(A)\right)^3 & 1-\left(\det(A)\right)^3 \\ 1-\left(\det(A)\right)^3 & 1+\left(\det(A)\right)^3 \end{bmatrix}$$

Wir sehen, wie der Hase läuft. Vermutung:

$$A^n=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\left(\det(A)\right)^n & 1-\left(\det(A)\right)^n \\ 1-\left(\det(A)\right)^n & 1+\left(\det(A)\right)^n \end{bmatrix}$$

## 4 Beweis

Die Vermutung stimmt allgemein für unsere *p,q*-Matrix. Wegen $\det(A)=p-q$ haben wir also die Vermutung:

$$A^n=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(p-q)^n & 1-(p-q)^n \\ 1-(p-q)^n & 1+(p-q)^n \end{bmatrix}$$

Beweis induktiv, wobei wir dauernd die Relation $p+q=1$ verwenden:

(I) Verankerung:

$$A^1 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(p-q)^1 & 1-(p-q)^1 \\ 1-(p-q)^1 & 1+(p-q)^1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2p & 2q \\ 2q & 2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

(II) Induktionsschritt:

$$A^{n+1} = A^n A = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(p-q)^n & 1-(p-q)^n \\ 1-(p-q)^n & 1+(p-q)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} p+p(p-q)^n+q-q(p-q)^n & q+q(p-q)^n+p-p(p-q)^n \\ q+q(p-q)^n+p-p(p-q)^n & p+p(p-q)^n+q-q(p-q)^n \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} (p+q)+(p-q)^n(p-q) & (q+p)-(p-q)^n(p-q) \\ (q+p)-(p-q)^n(p-q) & (p+q)+(p-q)^n(p-q) \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(p-q)^{n+1} & 1-(p-q)^{n+1} \\ 1-(p-q)^{n+1} & 1+(p-q)^{n+1} \end{bmatrix}$$

Damit ist die Vermutung bewiesen.

## 5 Grenzwert

Für $0 < p < 1$ und $q = 1-p$ ist $-1 < p-q < 1$ und damit:

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 6 Lineare Abbildung

Wir arbeiten exemplarisch mit der Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Im folgenden ist das Urbild grün, das Bild bei der Abbildung mit $A$ rot und das Bild bei der Abbildung mit $A^2$ blau eingezeichnet.

Die Abbildung 1 zeigt die Bilder des Einheitsquadrates:

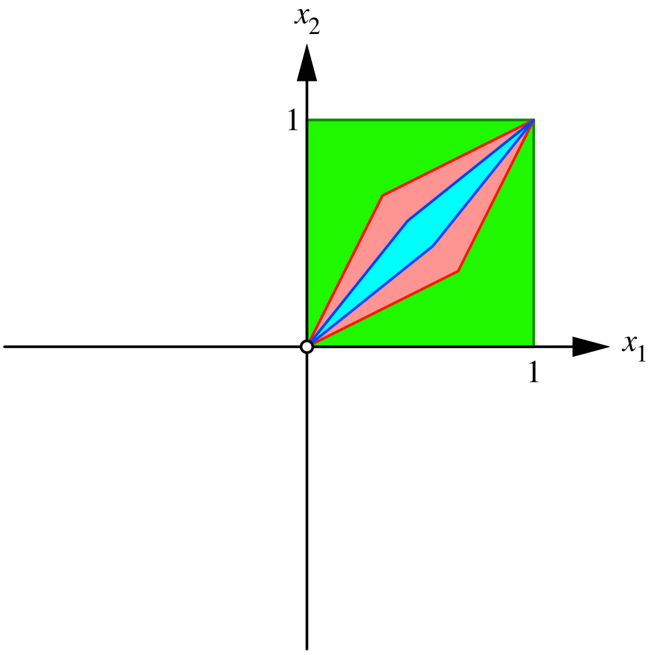


**Abb. 1: Bilder des Einheitsquadrates**

Die Abbildung 2 zeigt die Bilder des Einheitskreises.

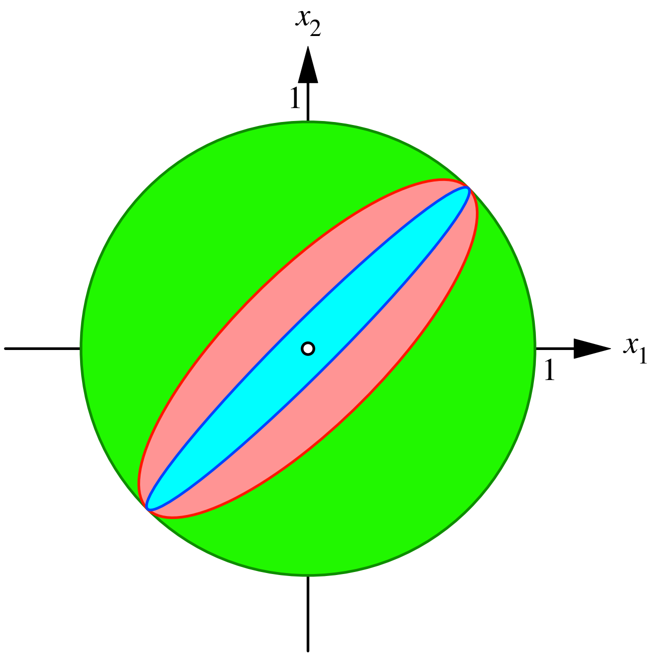


**Abb. 2: Bild des Einheitskreises**

Wir sehen eine Kontraktion zur 45°-Geraden. Diese hat die Richtung des ersten Eigenvektors. Sie ist Fixpunktgerade der Abbildung. In Richtung des zweiten Eigenvektors haben wir jeweils eine Kontraktion mit dem Faktor $\frac{1}{3}$. Dies ist der zweite Eigenwert.

## 7 Konjugation der Matrix

Die Abbildungen 1 und 2 legen nahe, die Situation in einem gedrehten Koordinatensystem zu beschreiben, dessen Achsen die Richtungen der Eigenvektoren haben (Abb. 3).

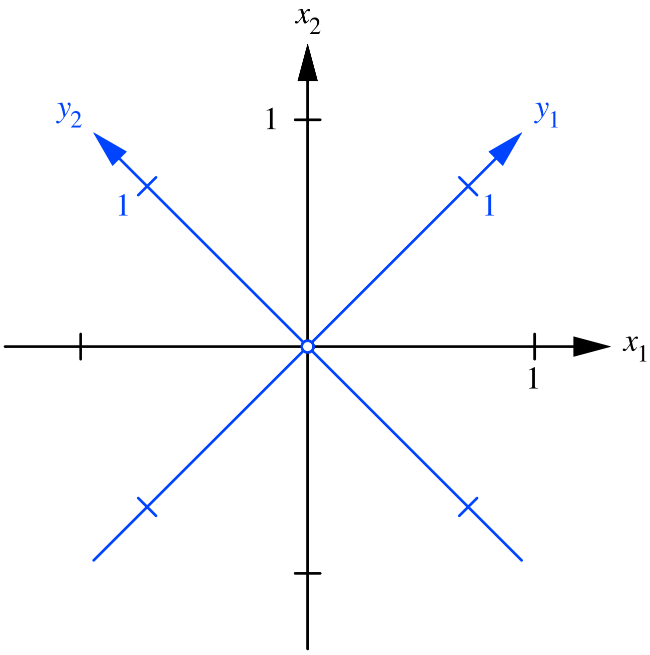


**Abb. 3: Neues Koordinatensystem**

Für die Umrechnung brauchen wir die Drehmatrix:

$$D=\begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Die Matrix $A^*$ welche die Abbildung im neuen Koordinatensystem beschreibt finden wir durch Konjugation:

$$A^*=D^{-1}AD=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{bmatrix}$$

In der Hauptdiagonalen von $A^*$ stehen nun die beiden Eigenwerte der Matrix. Auch das Abbildungsverhalten ist sofort klar: In Richtung der ersten Achse passiert nichts, in Richtung der zweiten Achse haben wir den Kontraktionsfaktor $p-q$.

Das Potenzieren wir nun einfach:

$$\left(A^*\right)^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{bmatrix}$$

Durch Rückkonjugation erhalten wir die Situation im ursprünglichen Koordinatensystem:

$$A^n = D\left(A^*\right)^n D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(p-q)^n & 1-(p-q)^n \\ 1-(p-q)^n & 1+(p-q)^n \end{bmatrix}$$

Damit hätten wir uns den Induktionsbeweis sparen können.

Weiter ist wegen $-1 < p-q < 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(A^*\right)^n = \lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Daraus erhalten wir ebenfalls durch Rückkonjugation:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## 8 Binomialverteilung

Wir kehren nun zurück zur ursprünglichen Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$$

Wir interpretieren $p$ als Wahrscheinlichkeit eines Erfolges bei einem Bernoulli-Experiment und $q$ entsprechend als Wahrscheinlichkeit eines Misserfolges.

Für das Quadrat der Matrix $A$ erhalten wir:

$$A^2 = \begin{bmatrix} p^2+q^2 & 2pq \\ 2pq & p^2+q^2 \end{bmatrix}$$

In der ersten Zeile ist das erste Element $p^2+q^2$ die Wahrscheinlichkeit, bei einer zweistufigen Bernoulli-Kette entweder zwei Erfolge oder zwei Misserfolge zu haben, das zweite Element $2pq$ ist die Wahrscheinlichkeit, genau einen Erfolg und einen Misserfolg zu haben. In der zweiten Zeile ist die Situation umgekehrt.

Weiter mit der dritten Potenz:

$$A^3 = \begin{bmatrix} p^3+3pq^2 & 3p^2q+q^3 \\ 3p^2q+q^3 & p^3+3pq^2 \end{bmatrix}$$

Hier ist $p^3 + 3pq^2$ die Wahrscheinlichkeit, bei drei Versuchen entweder drei oder genau einen Erfolg zu haben.

Allgemein ist in $A^n$ das erste Element in der obersten Zeile die Wahrscheinlichkeit, bei $n$ Versuchen eine Anzahl Erfolge aus $\{n, n-2, n-4, n-6, ...\}$ zu haben, und das andere Element der obersten Zeile die Gegenwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, bei $n$ Versuchen eine Anzahl Erfolge aus $\{n-1, n-3, n-5, n-7, ...\}$ zu erhalten.

Beweis mit Induktion.

Da für $n \to \infty$ die beiden Elemente den Limes $\frac{1}{2}$ haben, heißt das, dass sich die beiden Wahrscheinlichkeiten annähern. Dies ist auch intuitiv klar.