Hans Walser, [20170915]

Pythagorasbaum und Binomialverteilung

1 Worum geht es?

Der fraktale Pythagorasbaum enthält einen Link zu den Binomialkoeffizienten und zur Binomialverteilung.

2 Der Pythagorasbaum

Die Abbildung 1 zeigt den sattsam bekannten fraktalen Pythagorasbaum.

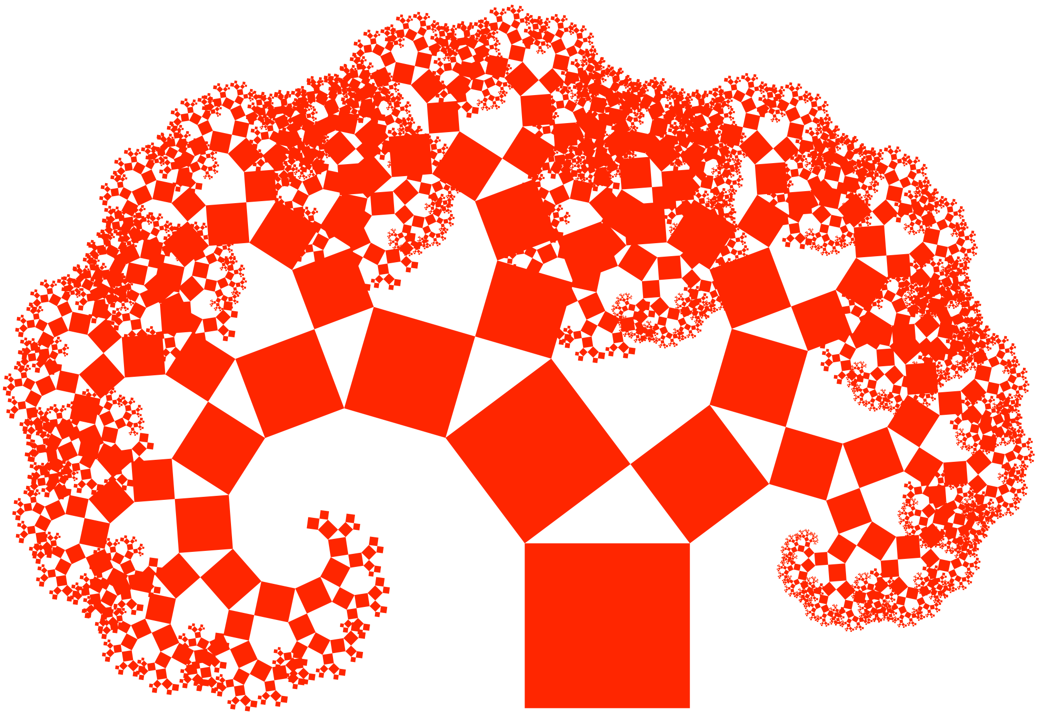

Abb. 1: Pythagorasbaum

Für die Abbildung wurde mit dem Lehrerdreieck (Seitenverhältnis 3:4:5) gearbeitet.

In der Abbildung 2 sind nur die ersten vier Generationen gezeichnet. Die Figur ist generationenweise gefärbt. Das große rote Quadrat ist die Generation null.

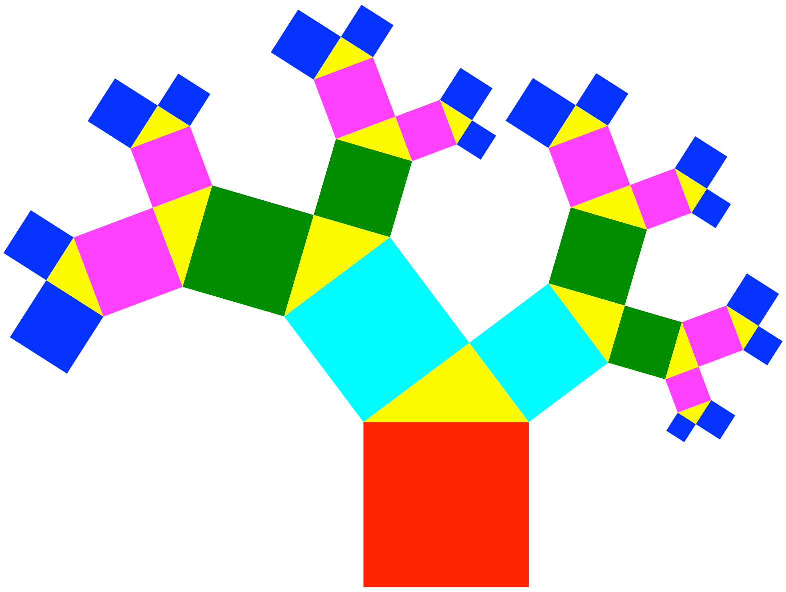

Abb. 2: Die ersten vier Generationen

Innerhalb einer Generation (gleiche Färbung) ist die Flächensumme der Quadrate konstant, und zwar so groß wie die Fläche des roten Quadrates der Generation null. Dies folgt aus dem Satz des Pythagoras.

3 Auszählen der Generationen

Wir zählen die Quadrate innerhalb einer Generation und sortieren der Größe nach.

Für die Generation null haben wir das rote Quadrat (Abb. 3).

Abb. 3: Generation null

Zu sortieren gibt es da nichts.

3.1 Generation 1

In der Generation 1 haben wir zwei Quadrate ungleicher Größe (Abb. 4).

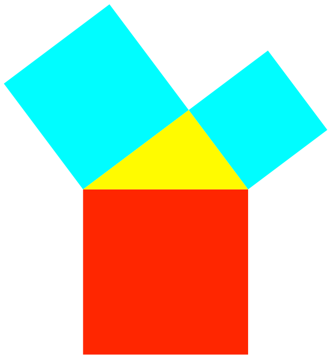

Abb. 4: Generation eins

Wir bezeichnen die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks wie üblich mit a und b und die Hypotenuse mit c. Ferner definieren wir:

$$p = \frac{a^2}{c^2} \quad , \quad q = \frac{b^2}{c^2} \tag{1}$$

Dabei ist p der Flächenanteil des Quadrates über der Kathete a am Hypotenusenquadrat und q der Flächenanteil des Quadrates über der Kathete b am Hypotenusenquadrat.

Es ist:

$$p + q = 1 \tag{2}$$

Wir nummerieren die Quadrate gemäß ihrer Größe, beginnend rechts und mit 0. Die Tabelle 1 gibt die Daten.

Nummer	0	1
Anzahl	1	1
Größe	p	q
Flächenanteil	p	q

Tab. 1: Generation 1

3.2 Generation 2

In der Generation 2 haben wir vier Quadrate (grün in Abb. 5).

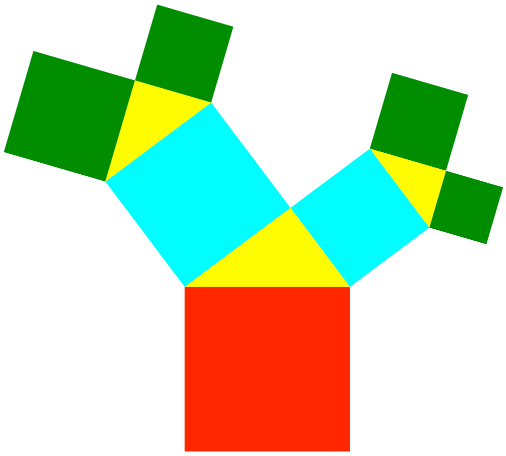

Abb. 5: Zweite Generation

Allerdings sind die beiden mittleren Quadrate gleich groß (Abb. 6).

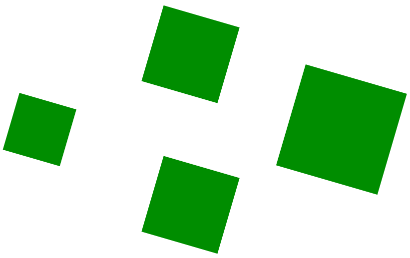

Abb. 6: Der Größe nach geordnet

Es gelten die Daten der Tabelle 2.

Nummer	0	1	2
Anzahl	1	2	1
Größe	p^2	pq	q^2
Flächenanteil	$1p^2$	$2pq$	$1q^2$

Tab. 2: Zweite Generation

Von den beiden mittleren Quadraten hat eines formal genommen die Größe pq, das andere die Größe qp.

3.3 Generation 3

In der Generation 3 haben wir $2^3 = 8$ Quadrate, aber nur vier unterschiedliche Größen (Abb. 7 und 8).

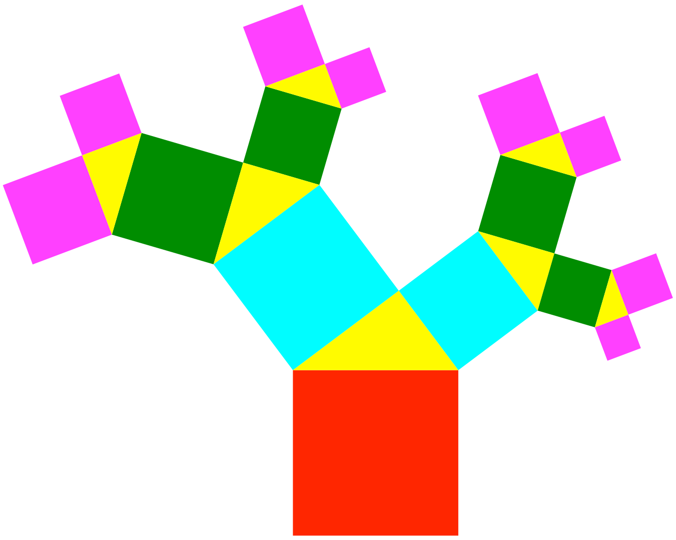

Abb. 7: Dritte Generation

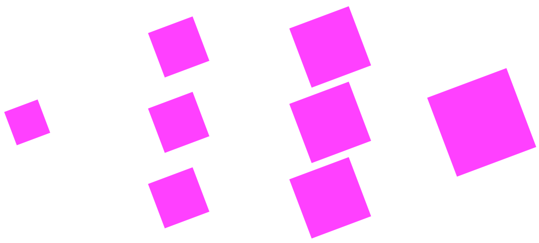

Abb. 8: Ordnen der Größe nach

Nummer	0	1	2	3
Anzahl	1	3	3	1
Größe	p^3	p^2q	pq^2	q^3
Flächenanteil	$1p^3$	$3p^2q$	$3pq^2$	$1q^3$

Tab. 3: Dritte Generation

3.4 Generation 4

In der Generation 4 haben wir $2^4 = 16$ Quadrate, aber nur fünf unterschiedliche Größen (Abb. 9 und 10).

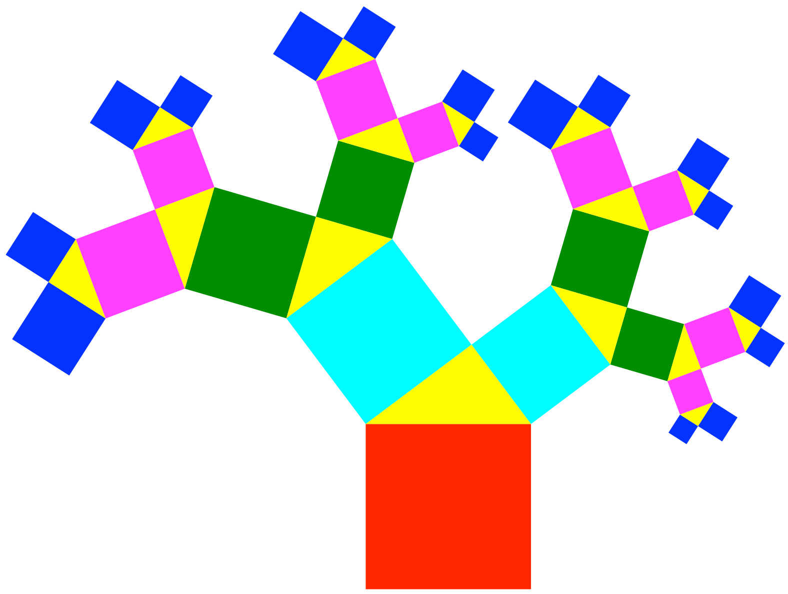

Abb. 9: Vierte Generation

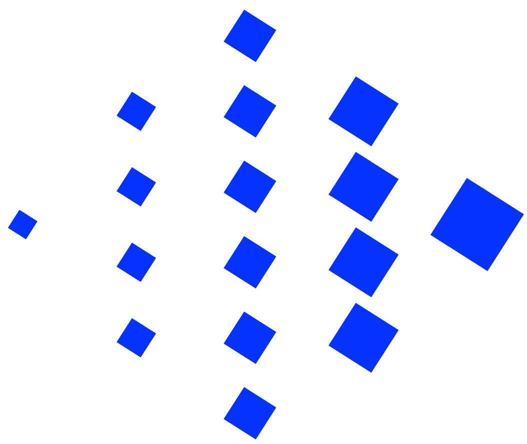

Abb. 10: Ordnen der Größe nach

Nummer	0	1	2	3	4
Anzahl	1	4	6	4	1
Größe	p^4	p^3q	p^2q^2	pq^3	q^4
Flächenanteil	$1p^4$	$4p^3q$	$6p^2q^2$	$4pq^3$	$1q^4$

Tab. 4: Vierte Generation

4 Binomialkoeffizienten und Binomialverteilung

In den Tabellen 1 bis 4 erkennen wir bei den Anzahlen die Binomialkoeffizienten und am Flächenanteil (gemessen am Hypotenusenquadrat) die Binomialverteilung.

Die Beweise ergeben sich aus dem Aufbau des Pythagorasbaumes.

Websites

Hans Walser: Dreiecksunterteilung und Binomialverteilung (abgerufen 16.09.2017):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Dreiecksunterteilung2/Dreiecksunterteilung2.htm