Hans Walser, [20060415d]

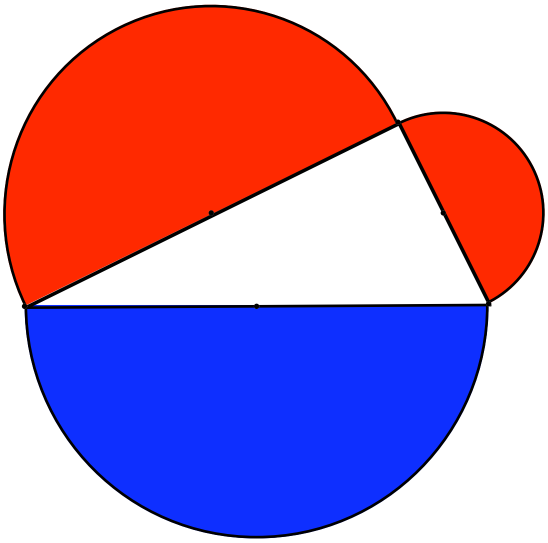
Pythagoras und kein Ende

Anregungen:

[Baptist 1997] Baptist, Peter: *Pythagoras und kein Ende?* Stuttgart: Klett 1997. ISBN 3-12-720040-4

Poster: 8. Tagung *Forum für Begabungsförderung in Mathematik* an der Universität Erfurt vom 30. 3. bis 1. 4. 2006

1 Variationen zu Pythagoras



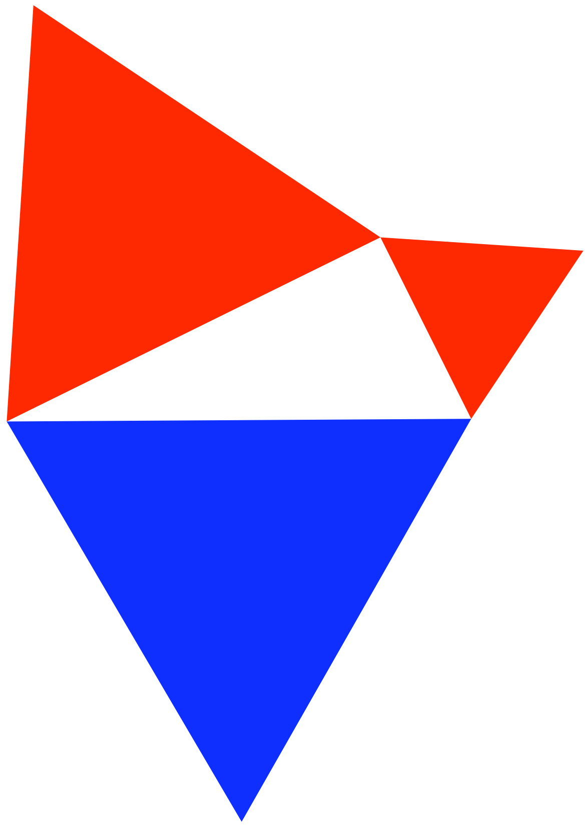
Variante

Der blaue Halbkreis ist flächenmäßig gleich groß wie die beiden roten Halbkreise zusammen.

Blauer Halbkreis: $A = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}c^2$

Roten Halbkreise: $A = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{\pi}{8}b^2 = \frac{\pi}{8}c^2$

2 Variationen zu Pythagoras



Variante

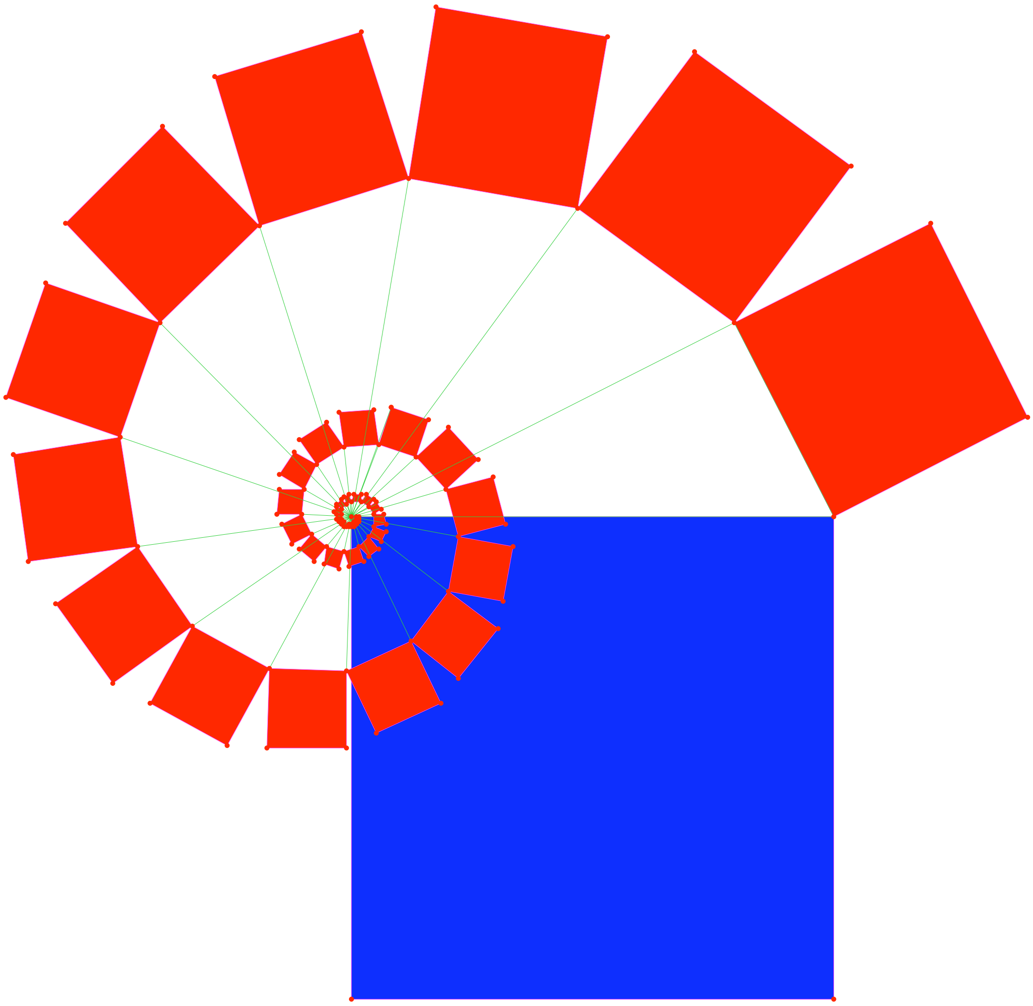
Das blaue gleichseitige Dreieck ist flächenmäßig gleich groß wie die beiden roten gleichseitigen Dreiecke zusammen.

Blaues Dreieck: $A = \frac{c^2}{4}\sqrt{3}$

Rote Dreiecke: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{b^2}{4}\sqrt{3} = \frac{c^2}{4}\sqrt{3}$

3 Pythagoras und kein Ende

Was kann zu folgender Figur gesagt werden?

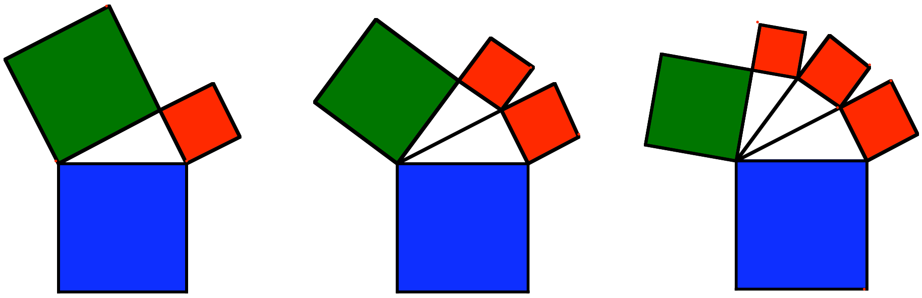


Was ist hier los?

Das blaue Quadrat ist flächenmäßig gleich groß wie die Summe der roten Quadrate.

Erster Lösungsweg

Das wird aus folgender Figurenkette klar.



Beweisfigur

Das blaue Quadrat ist jeweils flächengleich der Summe der Flächen der roten Quadrate und der Fläche des grünen Quadrates. Bei jedem weiteren Schritt wird das grüne Quadrat kleiner und verschwindet schließlich.

Zweiter Lösdungsweg

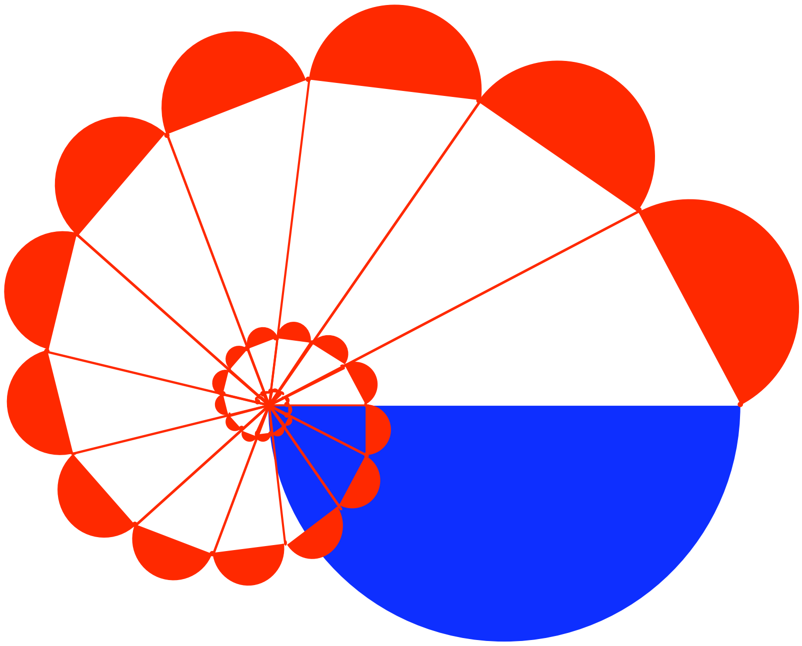
Das blaue Quadrat hat den Flächeninhalt c^2. Das erste rote Quadrat hat den Flächeninhalt a^2. Das zweite rote Quadrat ist gegenüber dem ersten roten Quadrat längenmäßig mit dem Faktor $\frac{b}{c}$ verkleinert, flächenmäßig also mit dem Faktor $\left(\frac{b}{c}\right)^2$. Das dritte rote Quadrat ist gegenüber dem zweiten roten Quadrat längenmäßig mit dem Faktor $\frac{b}{c}$ verkleinert, flächenmäßig also mit dem Faktor $\left(\frac{b}{c}\right)^2$, und so weiter.

Somit erhalten wir für die Summe der Flächeninhalte der roten Quadrate:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{c}\right)^{2n} a^2 = \frac{a^2}{1-\left(\frac{b}{c}\right)^2} = \frac{a^2}{\frac{c^2-b^2}{c^2}} = \frac{a^2}{\frac{a^2}{c^2}} = c^2$$

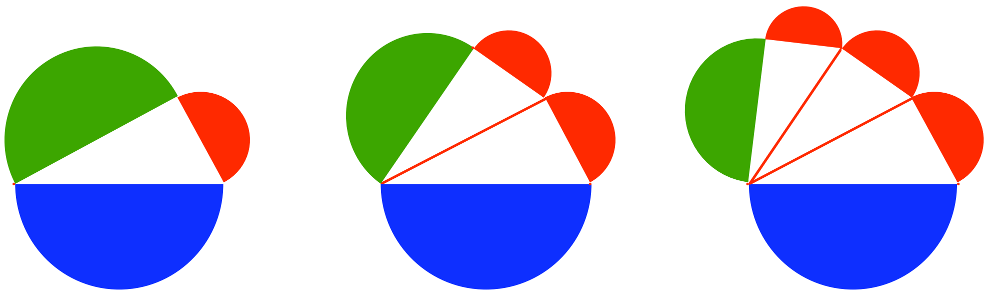
4 Pythagoras und kein Ende

Was kann zu folgender Figur gesagt werden?



Was ist hier los?

Der blaue Halbkreis ist flächenmäßig gleich groß wie die Summe der roten Halbkreise. Das wird aus folgender Figurenkette klar.

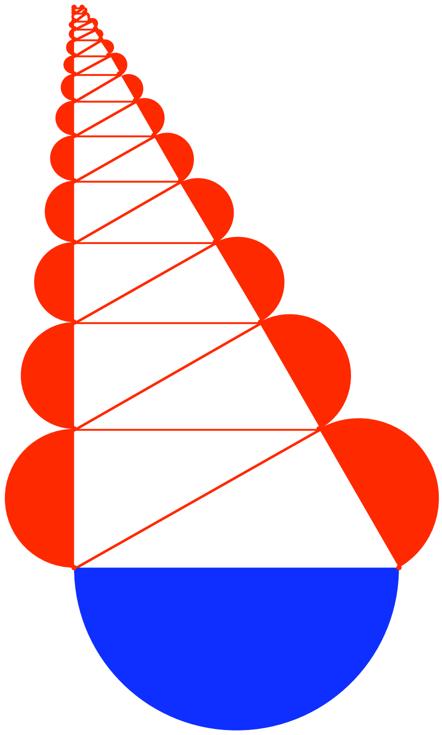


Beweisfigur

Der blaue Halbkreis ist jeweils flächengleich der Summe der Flächen der roten Halbkreise und der Fläche des grünen Halbkreises. Bei jedem weiteren Schritt wird der grüne Halbkreis kleiner und verschwindet schließlich.

5 Pythagoras und kein Ende

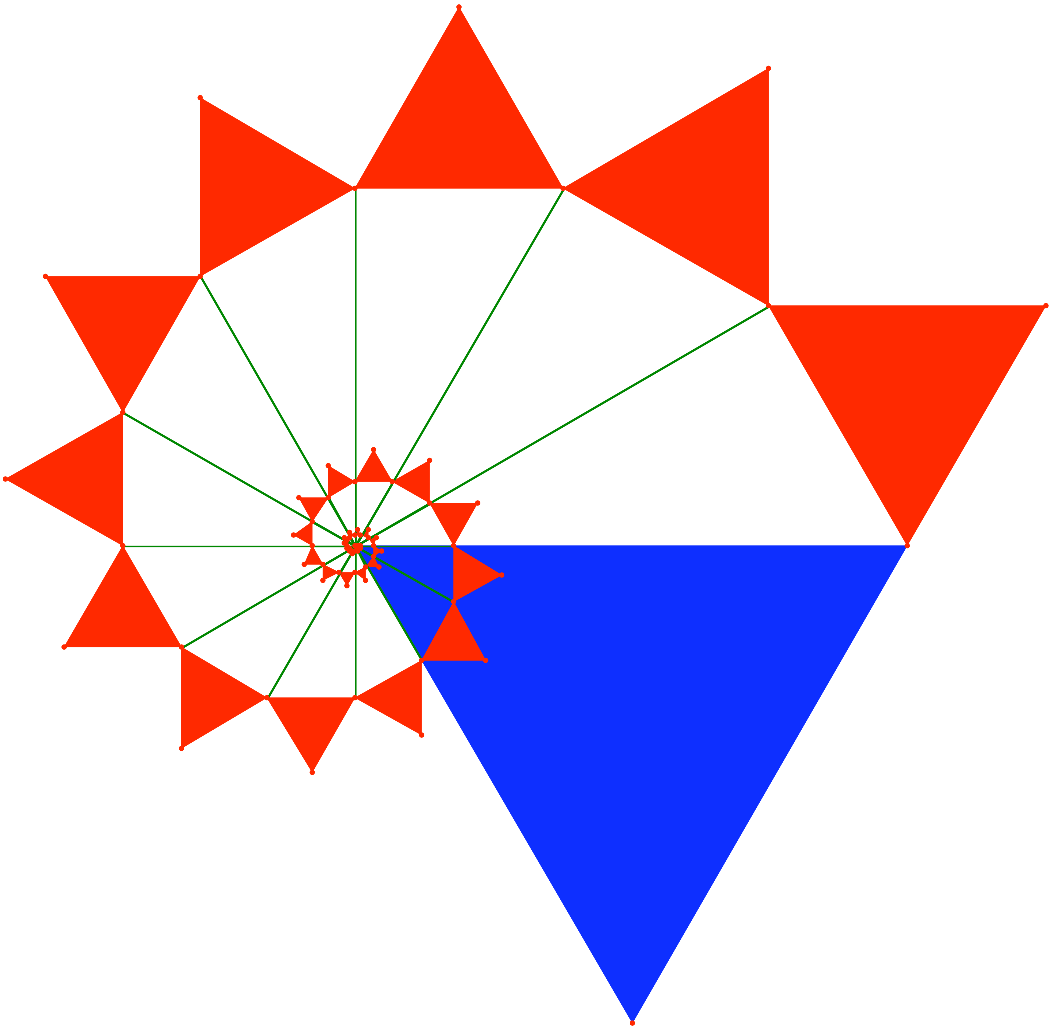
Was kann zu folgender Figur gesagt werden?



Was ist hier los?

Der blaue Halbkreis ist flächenmäßig gleich groß wie die Summe der roten Halbkreise.

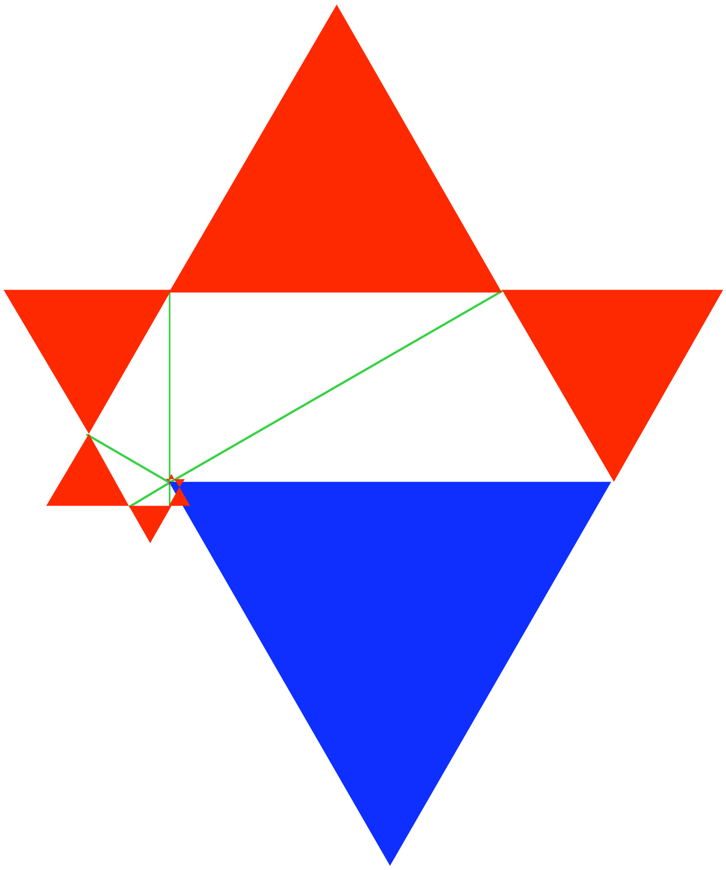
6 Gleichseitige Dreiecke



Gleichseitige Dreiecke

Die roten Dreiecke sind zusammen gleich groß wie das blaue Dreieck.

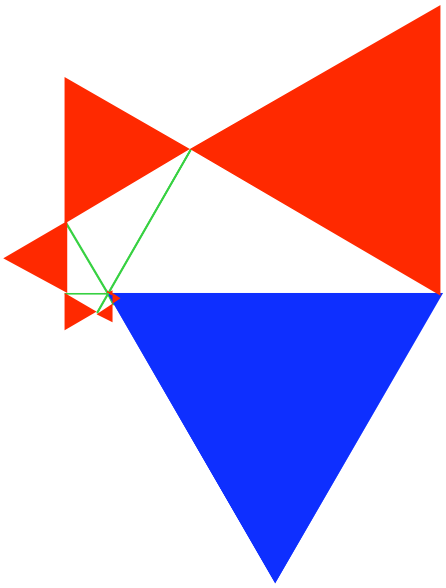
7 Gleichseitige Dreiecke



Gleichseitige Dreiecke

Die roten Dreiecke sind zusammen gleich groß wie das blaue Dreieck.

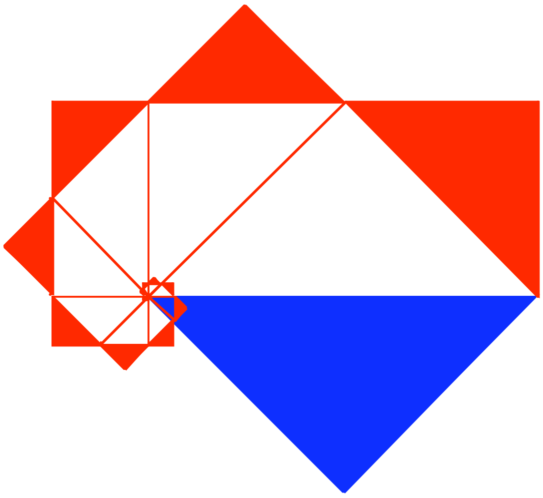
8 Gleichseitige Dreiecke



Gleichseitige Dreiecke

Die roten Dreiecke sind zusammen gleich groß wie das blaue Dreieck.

9 Rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke

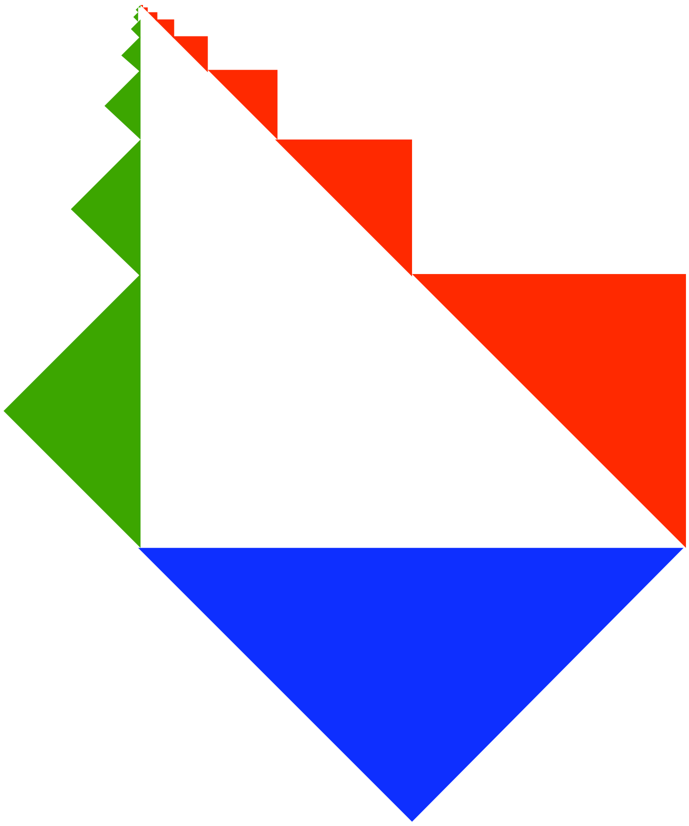


Was ist hier los?

Das blaue Dreieck ist flächenmäßig gleich groß wie die Summe der roten Dreiecke.

10 Unendliches Tangram

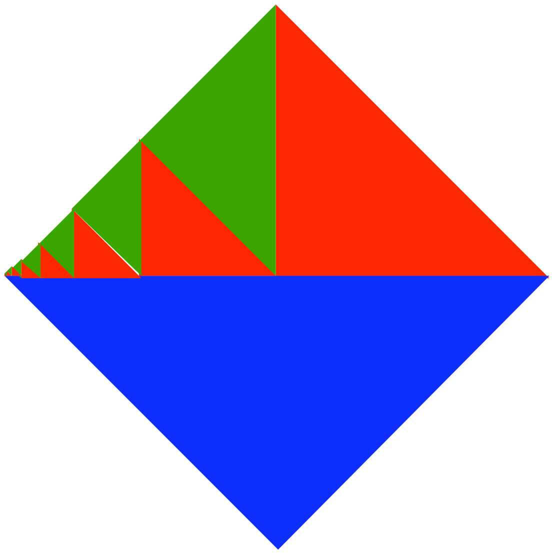
Diskussionsfigur



Diskussionsfigur

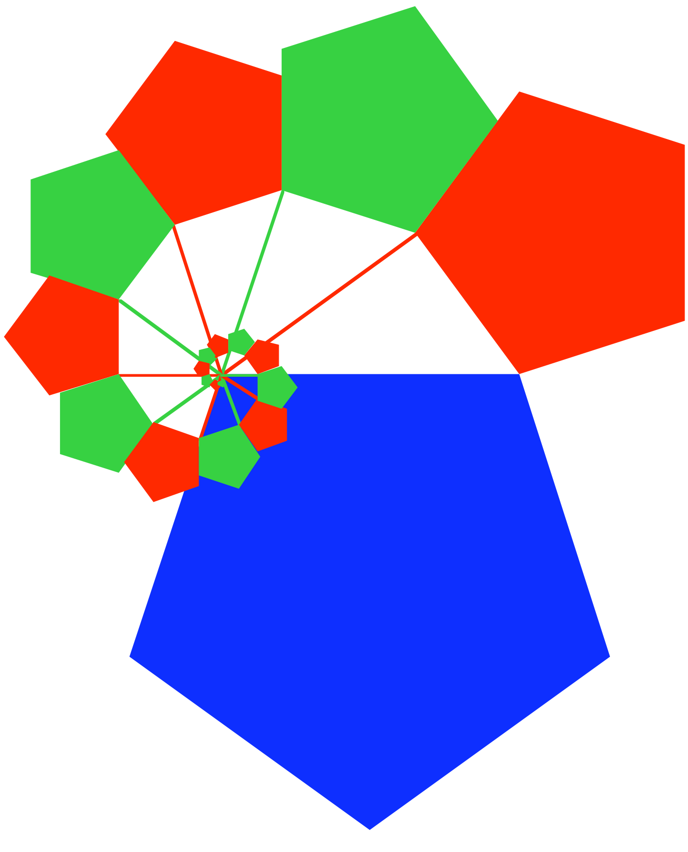
Das blaue halbe Quadrat ist flächenmäßig gleich groß wie die roten und grünen halben Quadrate zusammen.

Durch Umlegen erhalten wir ein einziges Quadrat.



Unendliches Tangram

11 Regelmäßige Fünfecke



Regelmäßige Fünfecke

Die roten und grünen Fünfecke sind zusammen gleich groß wie das blaue Fünfeck.