Hans Walser, [20141016]

Pythagoreische Vierecke mit orthogonalen Diagonalen

1 Worum geht es

Gesucht sind Vierecke mit orthogonalen Diagonalen, bei denen die Seiten und die Diagonalen ganzzahlig sind.

Als Hilfsmittel werden pythagoreische Dreiecke verwendet.

2 Vierecke mit orthogonalen Diagonalen

Ein Viereck mit den Seiten *a, b, c, d* hat genau dann orthogonale Diagonalen, wenn:

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$$

Es verschwindet die alternierende Summe der Quadrate der Seiten.

(Haag, 2003), (Walser, 2013).

3 Ganzzahlige Seiten und Diagonalen

Wir arbeiten mit zwei primitiven pythagoreischen Zahlentripeln $a_1 : b_1 : c_1$ und $a_2 : b_2 : c_2$. Es ist also $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$ und $a_2^2 + b_2^2 = c_2^2$. Damit bauen wir die Figur der Abbildung 1. Die zum ersten pythagoreischen Zahlentripel gehörenden Dreiecke sind gelb, die anderen zyan gezeichnet. Die pythagoreischen Dreiecke werden auf bündige Katheten gezoomt. Die Zoomfaktoren sind reihum a_2, a_1, b_2, b_1.

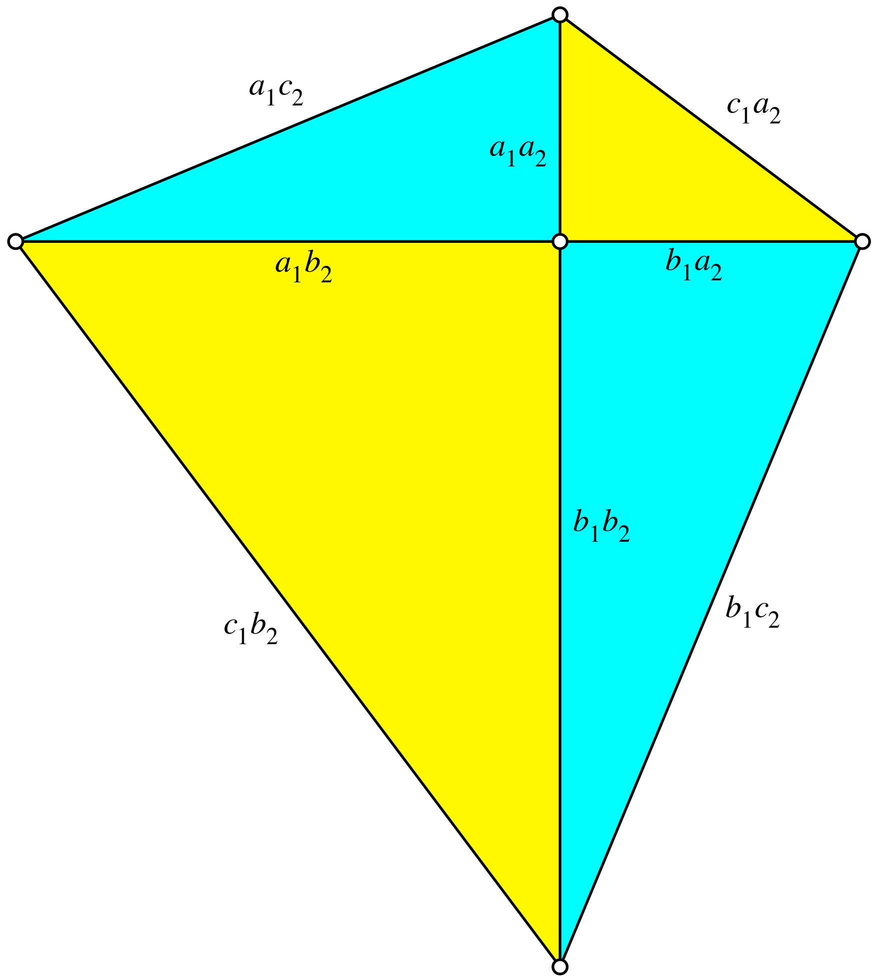

Abb. 1: Viereck aus pythagoreischen Dreiecken

Es sind die Seiten, die Diagonalenabschnitte und damit auch die Diagonalen ganzzahlig. Für den Flächeninhalt A des Viereckes erhalten wir:

$$A = \tfrac{1}{2}\left(a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2\right)$$

Da b_1, b_2 gerade sind, ist der Flächeninhalt A ganzzahlig.

4 Sehnenviereck

Das Viereck ist ein Sehnenviereck (Abb. 2). Dies kann entweder mit Winkelüberlegungen (Ortsbogen) oder mit dem Satz des Ptolemäus gezeigt werden. Für den Umkreisradius r ergibt sich:

$$r = \tfrac{1}{2} c_1 c_2$$

Da bei primitiven pythagoreischen Zahlentripeln die c_i ungerade sind, ist der Umkreisradius r echt halbzahlig.

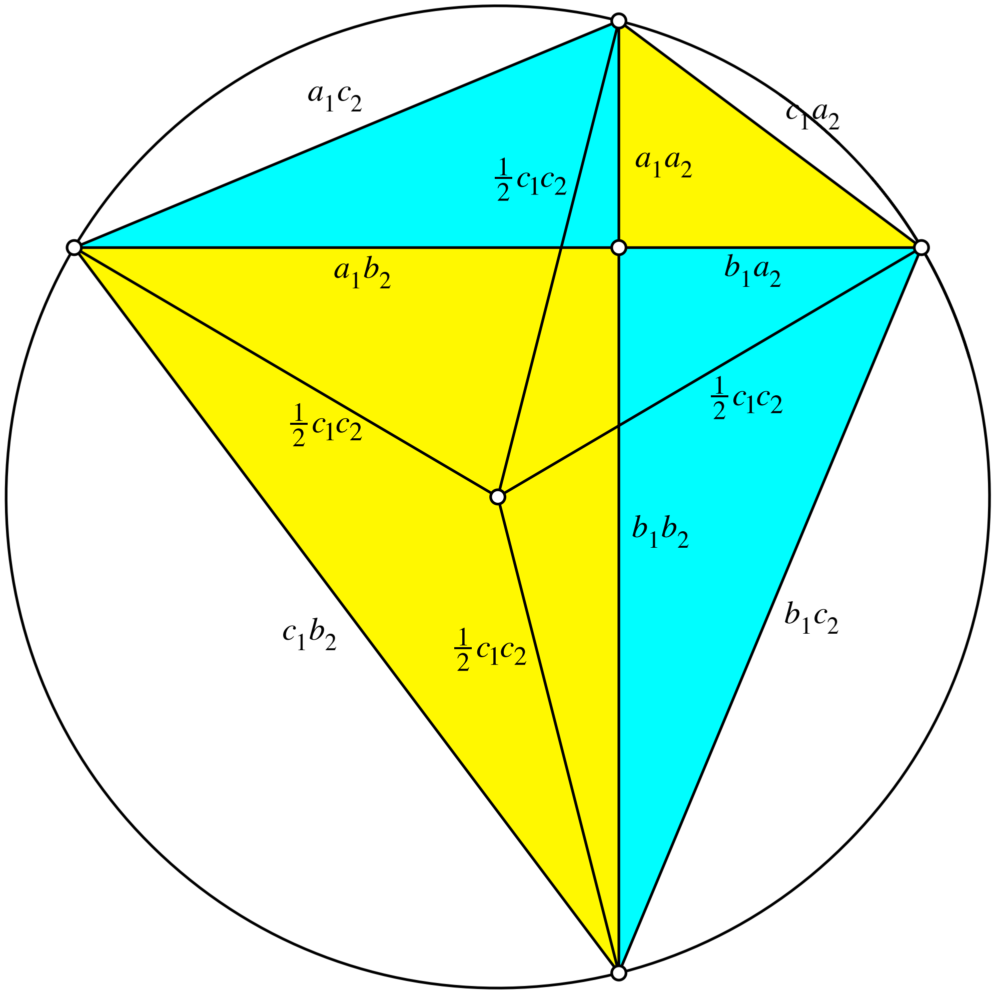

Abb. 2: Sehnenviereck

5 Neue Aufteilung

Mit dem Umkreismittelpunkt kann das Viereck neu sektioniert werden. Dabei entstehen von den beiden Typen der pythagoreischen Dreiecke je vier kongruente Exemplare (Abb. 3).

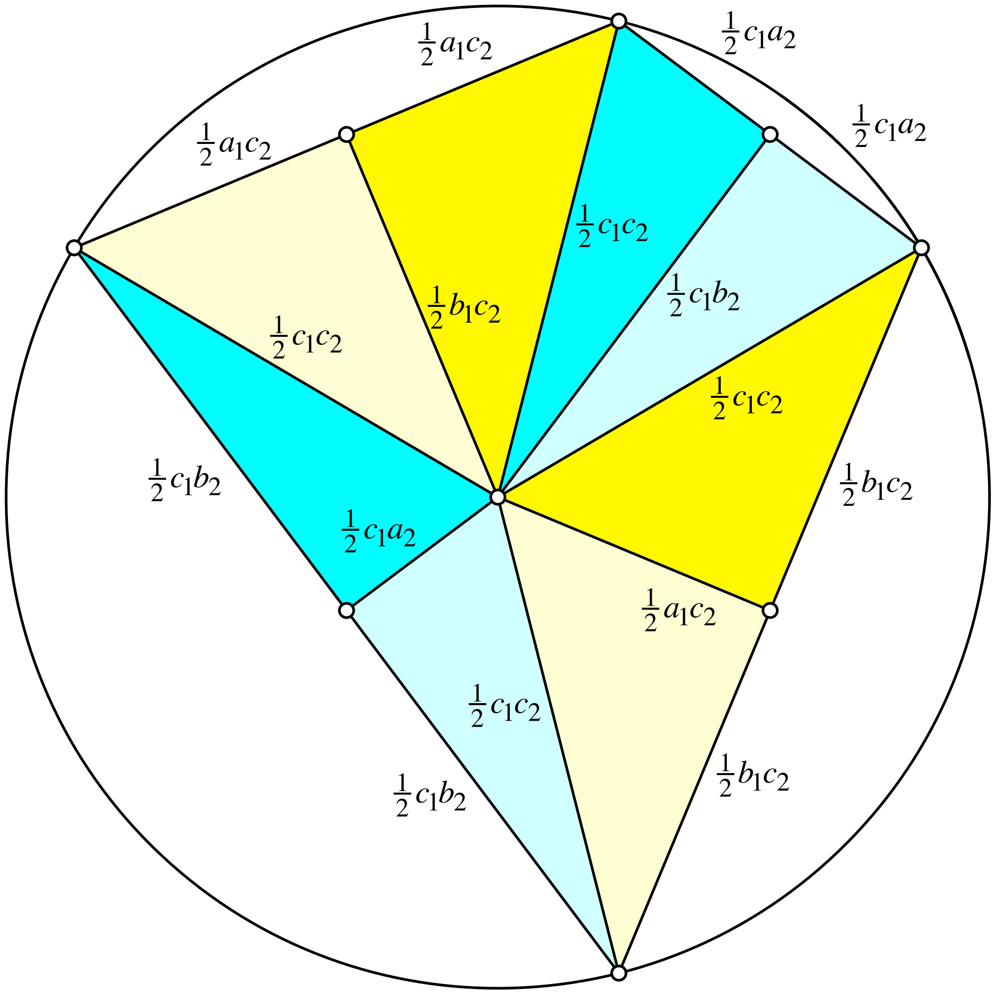

Abb. 3: Aufteilung in kongruente pythagoreische Dreiecke

6 Beispiel

Mit $a_1 : b_1 : c_1 = 3 : 4 : 5$ und $a_2 : b_2 : c_2 = 5 : 12 : 13$ ergeben sich die Werte der Abbildung 4.

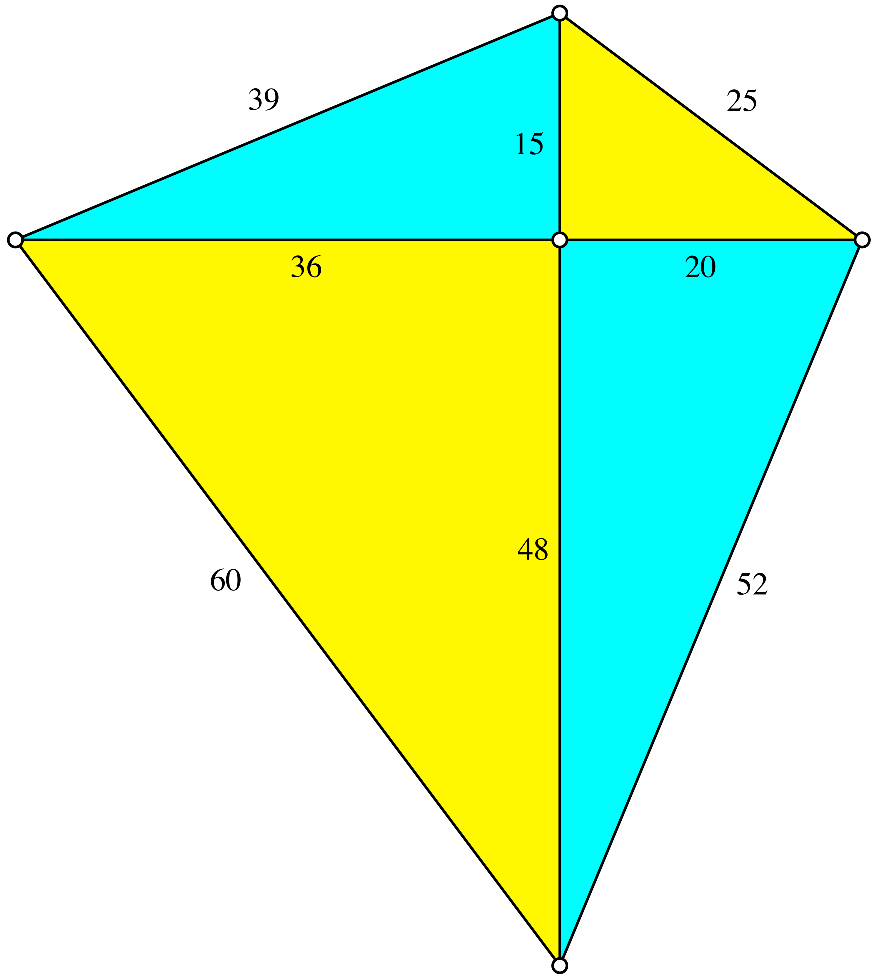

Abb. 4: Beispiel

Die beiden Diagonalen haben die Längen e = 56 und $f = 63$.

Der Umkreisradius ist $r = 32.5$.

7 Andere ganzzahlige Lösung?

Mit gegebenen Seiten $a = 25$, $b = 39$, $c = 60$, $d = 52$ ist das Viereck noch nicht festgelegt. Wir können noch die eine Diagonale e wählen und dann mit der Heronschen Flächenformel die andere Diagonale ausrechnen. Nachstehend ein brute force Programm für unser Beispiel:

```
a:= 25: b:=39: c:=60: d:=52:
for e from 1 to 80 do
```

```
 q[e]:=1/e/2*sqrt((a+b+e)*(-a+b+e)*(a-b+e)*(a+b-e)):
 s[e]:=1/e/2*sqrt((c+d+e)*(-c+d+e)*(c-d+e)*(c+d-e)):
 f[e]:=q[e]+s[e]:
 if type(f[e], integer) then print(e, f[e]) end;
end:
```

Wir erhalten die beiden Fälle:

$e = 16, \quad f = 63$

$e = 56, \quad f = 63$

Die zweite Lösung ist unser Beispiel. Die erste Lösung ist nicht konvex und entsteht aus unserem Beispiel durch Einspiegeln (Abb. 5). Wir haben also keine echt neue Lösung. Es ist aber kein Sehnenviereck mehr.

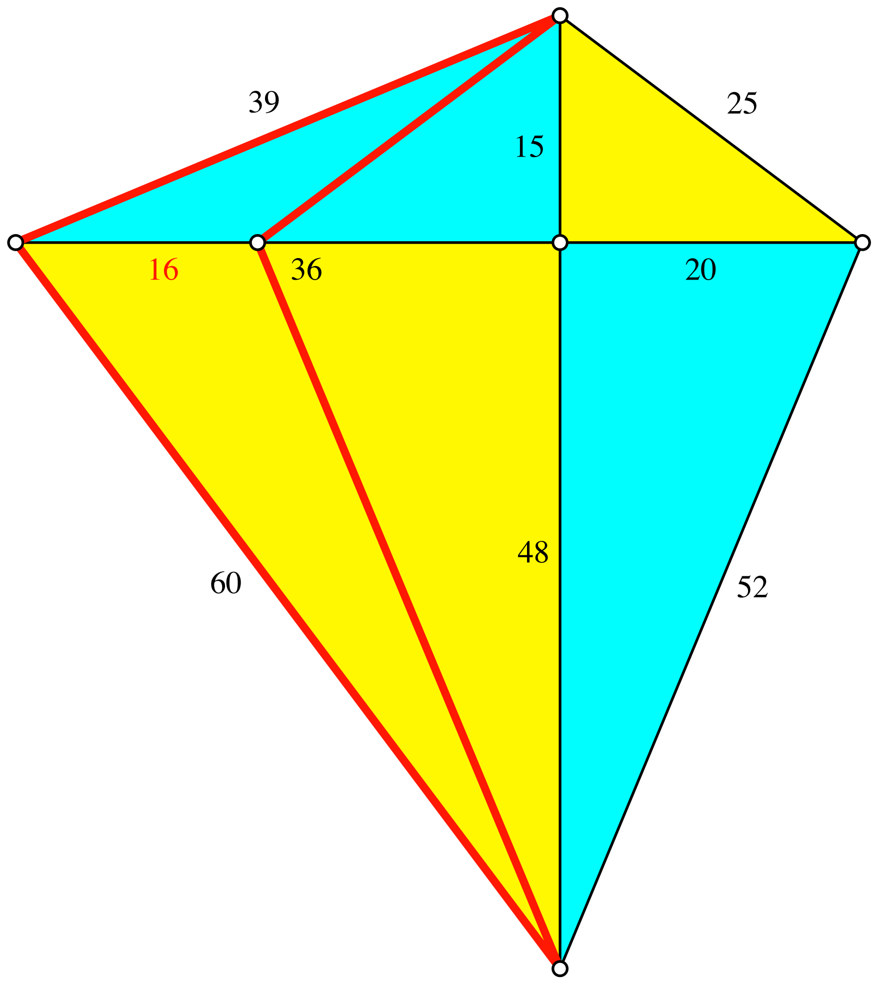

Abb. 5: Die andere Lösung

Literatur

Haag, Wilfried (2003): Wege zu geometrischen Sätzen. Stuttgart: Klett. ISBN 3-12-720120-6

Walser, Hans (2013): Vergessene Vierecke. In: Filler, Andreas / Ludwig, Mathias (Hrsg.): Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken. Hildesheim : Franzbecker 2013. ISBN: 978-3-88120-589-4. S. 153-166.