Hans Walser, [20230507]

Pythagoreische Dreiecke

1 Worum geht es?

Visualisierung der Parametrisierung der pythagoreischen Dreiecke

2 Im Quadratraster

In einem Quadratraster zeichnen wir ein grünes rechtwinkliges Dreieck mit der ganzzahligen horizontalen Kathete u und der ganzzahligen vertikalen Kathete v (Abb. 1 für $u = 3$ und $v = 2$).

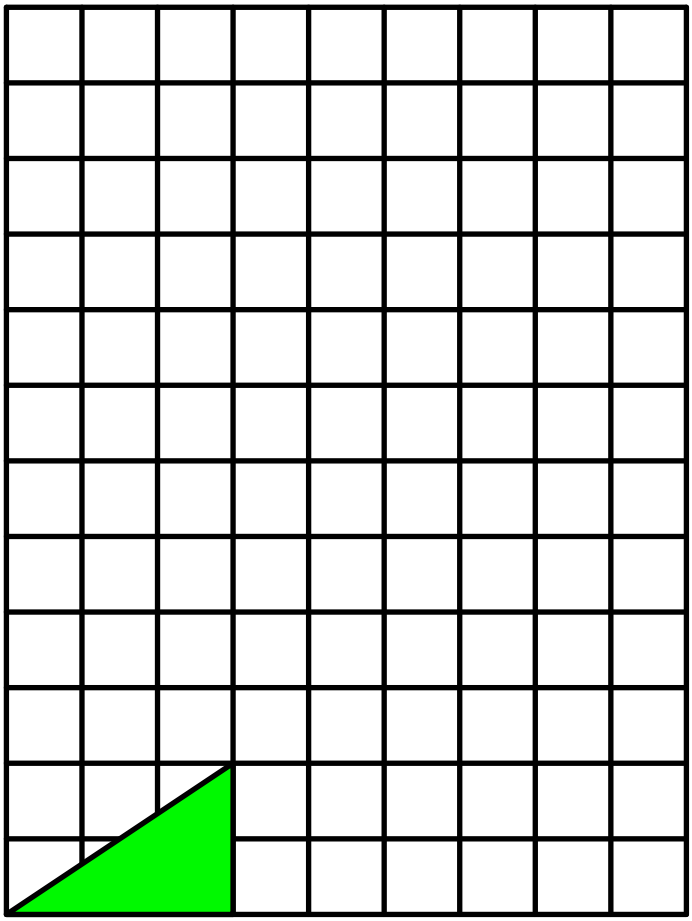

Abb. 1: Im Quadratraster

Wir ergänzen nach rechts oben zu einer Kette von insgesamt u solcher Dreiecke (Abb. 2).

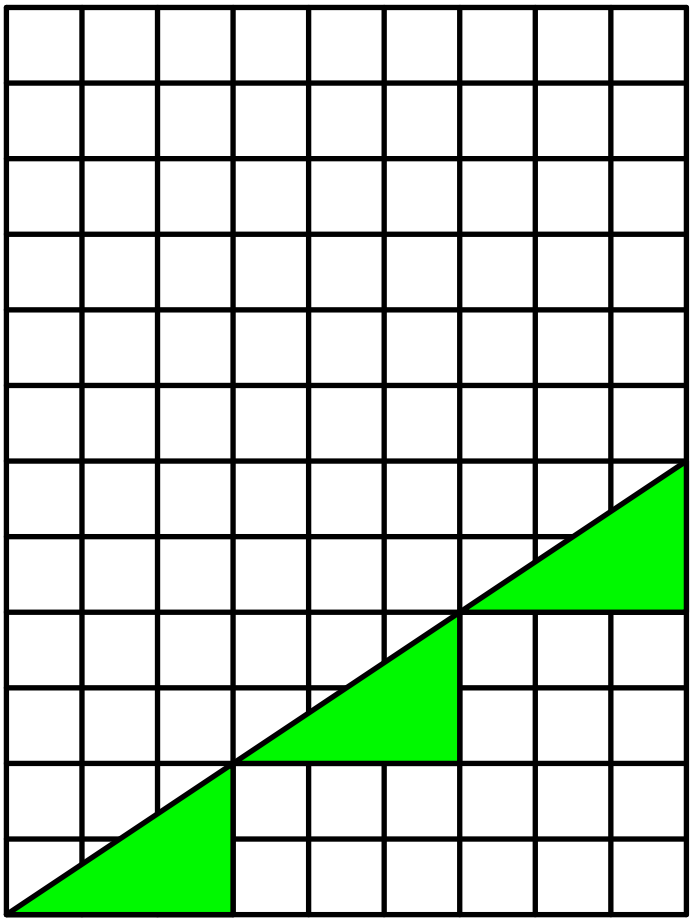

Abb. 2: Dreiecke anfügen

Wir drehen das Ausgangsdreieck um 90° und fügen oben, nun nach links, v Exemplare an (Abb. 3).

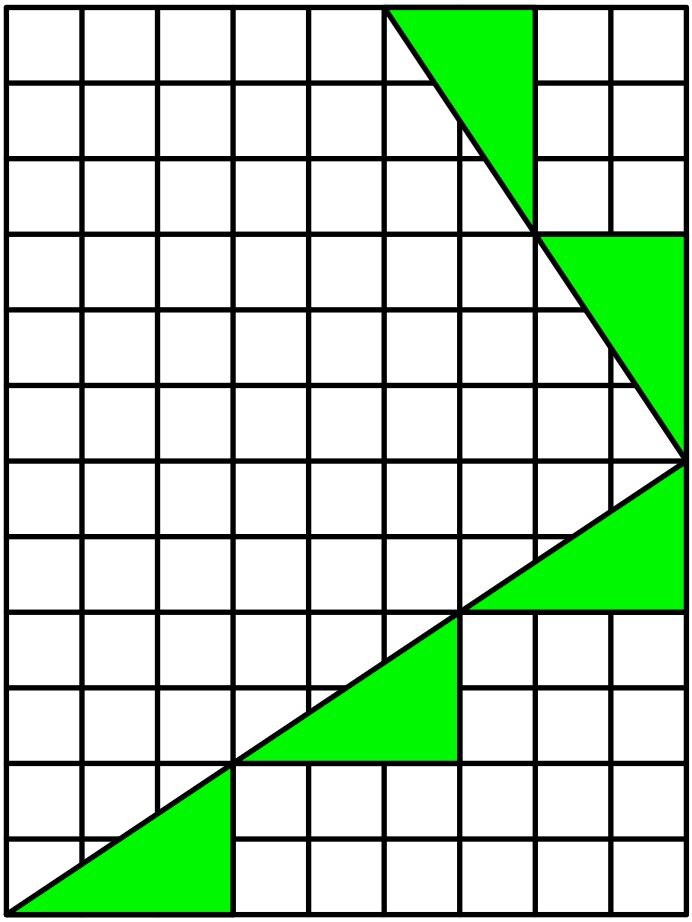

Abb. 3: Weitere Dreiecke

3 Schräge

Nun geschieht etwas Seltsames: Wir können eine Schräge einfügen, die aus Quadraten zusammengesetzt ist, welche zu den Quadraten des Quadratrasters kongruent sind (magenta in Abb. 4). Es „geht auf“.

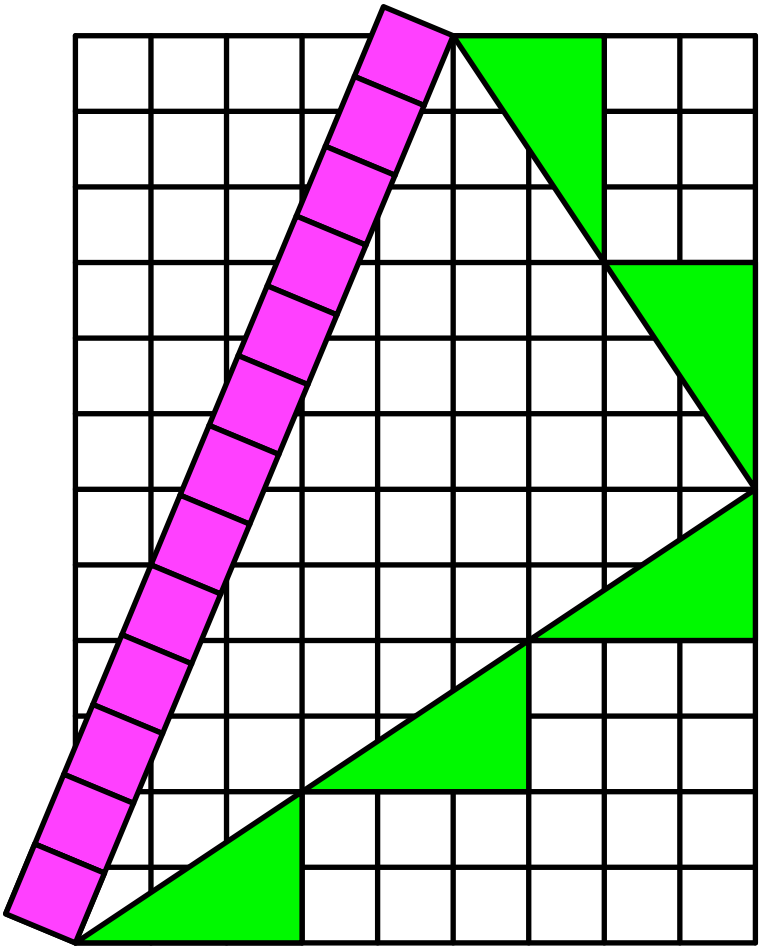

Abb. 4: Schräge

Dies müssen wir natürlich beweisen.

Ein grünes rechtwinkliges Dreieck hat die Hypotenusenlänge $\sqrt{(u^2 + v^2)}$.

Grün und magenta sparen ein (weißes) rechtwinkliges Dreieck aus, dessen eine Kathete $u\sqrt{(u^2 + v^2)}$ lang ist und die andere Kathete $v\sqrt{(u^2 + v^2)}$.

Für seine Hypotenuse, und das ist die magenta Schräge, erhalten wir mit Pythagoras die Länge $\sqrt{(u^2 + v^2)}\ \sqrt{(u^2 + v^2)} = u^2 + v^2$. Da u und v ganzzahlig sind, ist auch $u^2 + v^2$ ganzzahlig. Dies war zu zeigen.

Die Abbildung 5 zeigt die Abbildung 4 mit einigen Maßangaben.

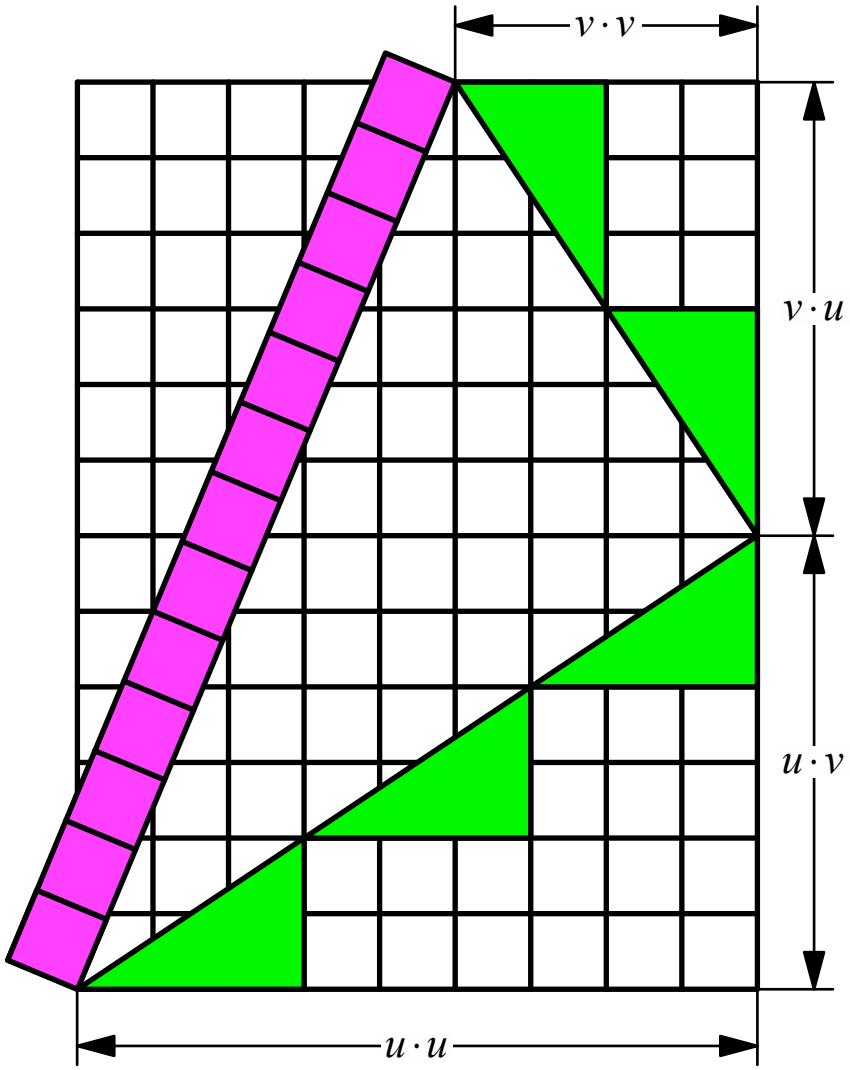

Abb. 5: Maße

4 Pythagoreisches Dreieck

Eine ganzzahlige Schräge in einem Quadratraster kann zu einem pythagoreischen Dreieck ergänzt werden (gelb in Abb. 6 und 7).

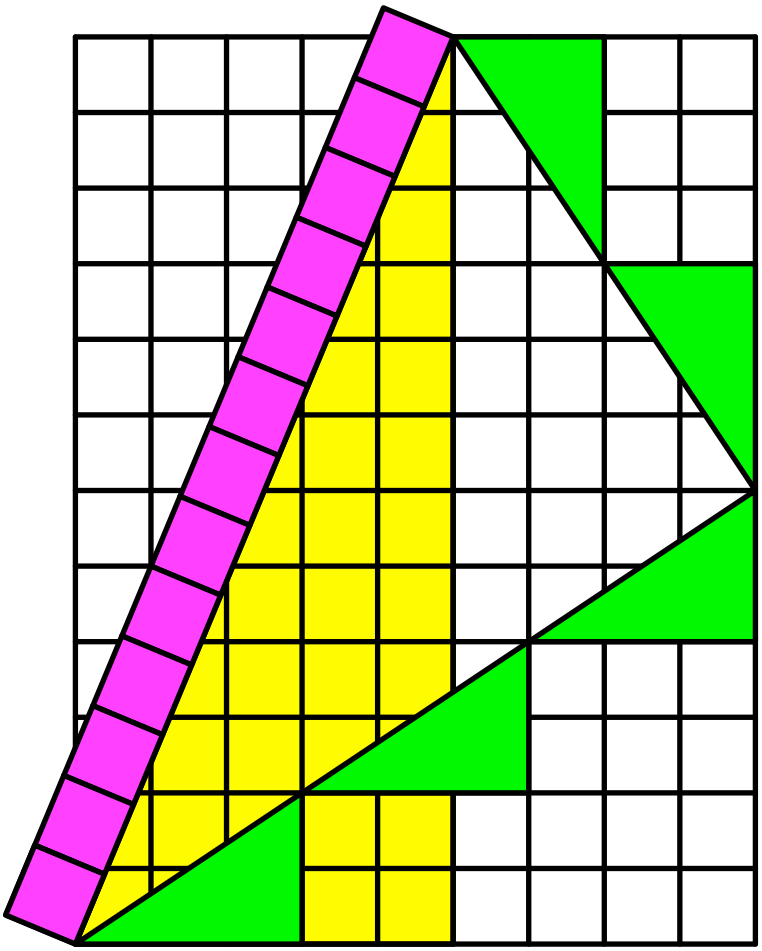

Abb. 6: Pythagoreisches Dreieck

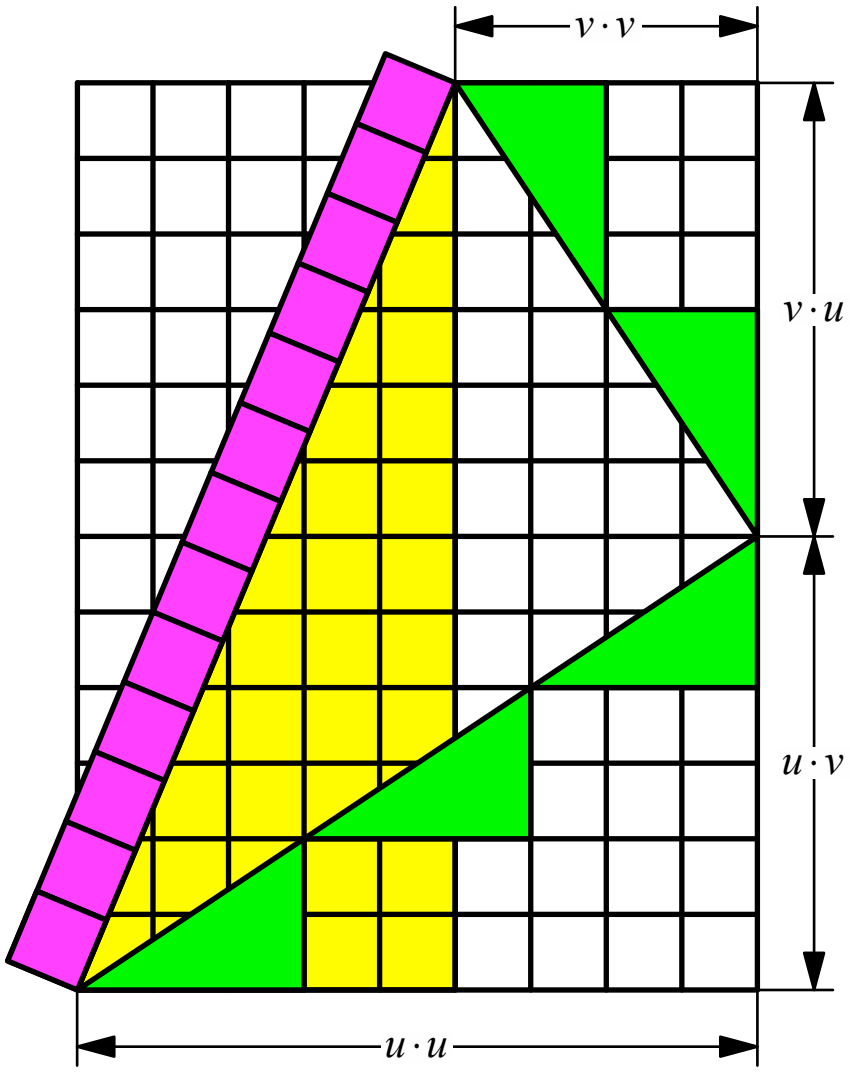

Abb. 7: Pythagoreisches Dreieck mit Maßangaben

Aus der Abbildung 7 lesen wir für das pythagoreische Dreieck folgende Maße ab:

$a = u^2 - v^2$ (horizontale Kathete)
$b = 2uv$ (vertikale Kathete)
$c = u^2 + v^2$ (Hypotenuse)

Das sind aber genau die Formeln für die übliche Parametrisierung der pythagoreischen Dreiecke.

Weblinks

Hans Walser: Pythagorean Triangles
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagorean_Triangles/Pythagorean_Triangles.htm
Hans Walser: Pythagoreische 60°- und 120°-Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth-60-Dreiecke/Pyth-60-Dreiecke.htm
Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke/Pyth_Dreiecke.htm
Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke2/Pyth_Dreiecke2.htm
Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke3/Pyth_Dreiecke3.htm
Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke4/Pyth_Dreiecke4.htm
Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke5/Pyth_Dreiecke5.html
Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke6/Pyth_Dreiecke6.html
Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke7/Pyth_Dreiecke7.html
Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke falten
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dr_falten/Pyth_Dr_falten.htm
Hans Walser: Pythagoreische Rechtecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/PythRechtecke/PythRechtecke.htm
Hans Walser: Pythagoreische Spiralen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagoreische_Spiralen/Pythagoreische_Spiralen.htm
Hans Walser: Pythagoreische Spiralen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagoreische_Spiralen2/Pythagoreische_Spiralen2.htm
Hans Walser: Pythagoreische Vierecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Vierecke/Pyth_Vierecke.htm
Hans Walser: Pythagoreische Vierecke mit orthogonalen Diagonalen
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Vierecke2/Pyth_Vierecke2.htm