Hans Walser, [20180326]

Pythagoreische Dreiecke falten

Anregung: R. S.-H., F.

1 Worum geht es

Durch Falten erhalten wir eine Folge von pythagoreischen Dreiecken. Es ergibt sich auch eine Verallgemeinerung des Satzes von Haga.

2 Das Vorgehen

Wir arbeiten mit quadratischem Origami-Papier der Kantenlänge 1. Vorderseite gelb, Rückseite zyan. Durch Falten finden wir den Mittelpunkt der Oberkante (Abb. 1).

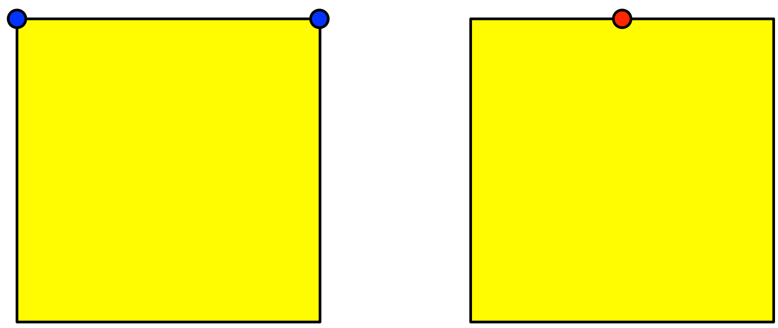

Abb. 1: Mittelpunkt der Oberkante

Wir falten nun den rechten unteren Eckpunkt auf diesen Mittelpunkt (Abb. 2).

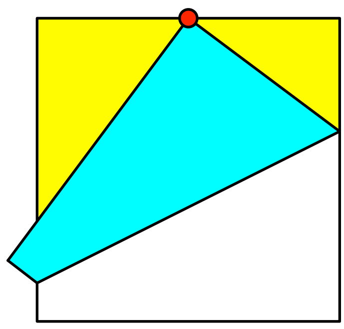

Abb. 2: Rechte untere Ecke

Es werden zwei gelbe rechtwinklige Dreiecke sichtbar. Im Dreieck rechts oben haben wir für die längere Kathete:

$$b_1 = \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

Wegen

$$c_1 + a_1 = 1 \tag{2}$$

und

$$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2 \tag{3}$$

folgt:

$$a_1 = \tfrac{3}{8}, \quad b_1 = \tfrac{1}{2}, \quad c_1 = \tfrac{5}{8} \tag{4}$$

Somit ist:

$$a_1 : b_1 : c_1 = 3:4:5 \tag{5}$$

Es handelt sich um das „Lehrer-Dreieck“, das einfachste pythagoreische Dreieck.
Das Dreieck links oben ist dazu ähnlich. Daher ergeben sich die Längen gemäß Abbildung 3 (Satz von Haga).

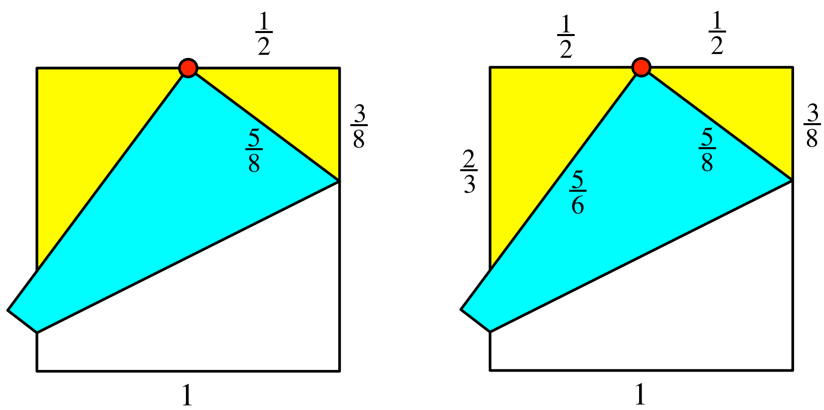

Abb. 3: Satz von Haga

Nun falten wir die beiden in der Abbildung 4 blau markierten Punkte aufeinander. Dadurch erhalten wir ein neues rechtwinkliges Dreieck mit der langen Kathete:

$$b_2 = \frac{2}{3} \tag{6}$$

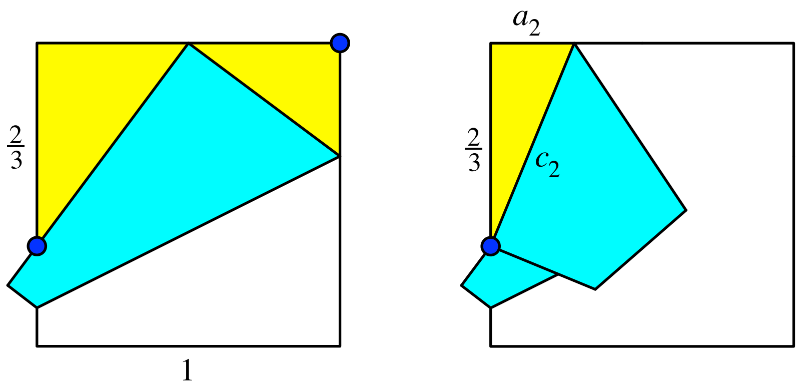

Abb. 4: Neues rechtwinkliges Dreieck

Wegen

$$a_2 + c_2 = 1 \tag{7}$$

und

$$c_2^2 = a_2^2 + b_2^2 \tag{8}$$

ergibt sich:

$$a_2 = \frac{5}{18}, \quad b_2 = \frac{12}{18}, \quad c_2 = \frac{13}{18} \tag{9}$$

Wir haben also das pythagoreische Dreieck mit dem Seitenverhältnis:

$$a_2 : b_2 : c_2 = 5 : 12 : 13 \tag{10}$$

Die Abbildung 5 zeigt die beiden nächsten Faltschritte. Es wird aufgefaltet.

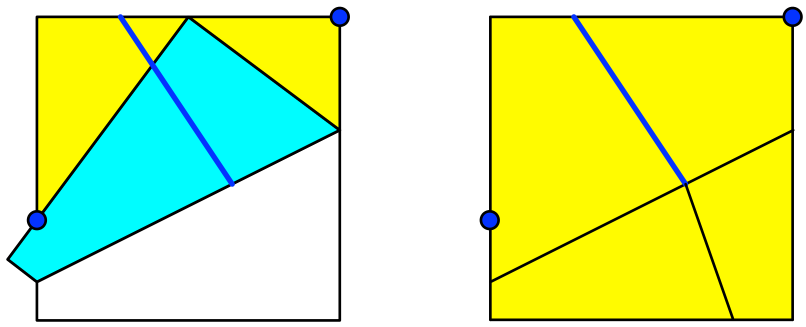

Abb. 5: Auffalten

Nun falten wir erneut die beiden blauen Punkte aufeinander und falten anschließend die beiden roten Punkte aufeinander (Abb. 6).

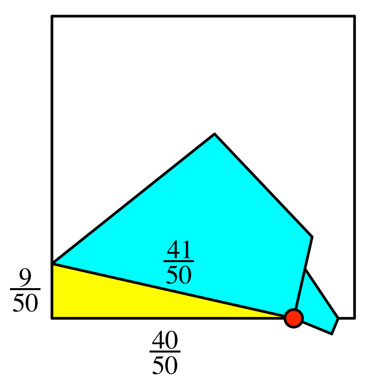

Abb. 6: Nächster Faltschritt

So entsteht ein weiteres rechtwinkliges Dreieck. Mit einer analogen Rechnung wie oben erhalten wir:

$$a_3 = \tfrac{9}{50}, \quad b_3 = \tfrac{40}{50}, \quad c_3 = \tfrac{41}{50} \tag{11}$$

Wir haben also das pythagoreische Dreieck mit dem Seitenverhältnis:

$$a_3 : b_3 : c_3 = 9 : 40 : 41 \tag{12}$$

Wir vermuten, dass wir durch Iteration eine Folge von pythagoreischen Dreiecken erhalten.

3 Rekursion

Die Abbildung 7 illustriert den allgemeinen Iterationsschritt von (a_n, b_n, c_n) auf $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$.

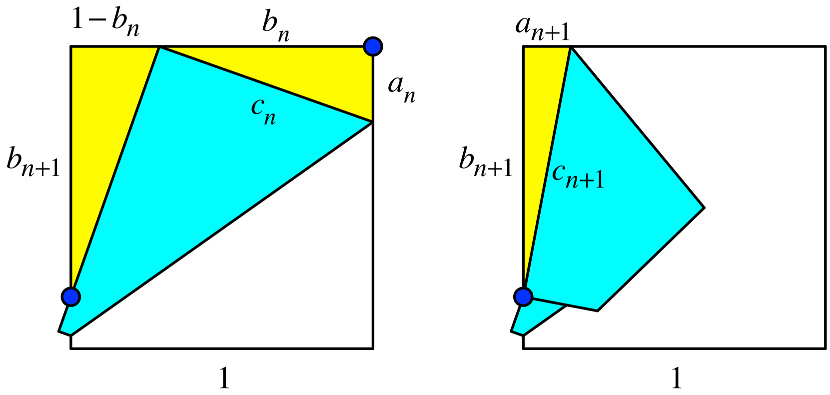

Abb. 7: Allgemeiner Schritt

Wir erhalten zunächst:

$$b_{n+1} = (1 - b_n)\frac{b_n}{a_n} \tag{13}$$

Aus

$$c_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 \tag{14}$$

und

$$c_{n+1} + a_{n+1} = 1 \tag{15}$$

ergibt sich

$$c_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(1 + b_{n+1}^2\right) \tag{16}$$

und:

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left(1 - b_{n+1}^2\right) \tag{17}$$

Mit den Formeln (13), (16) und (17) ist die Rekursion vollständig beschrieben.

4 Tabellen

Die Tabelle 1 gibt die ersten 10 Beispiele.

n	a_n	b_n	c_n
1	3/8	1/2	5/8
2	5/18	2/3	13/18
3	9/50	4/5	41/50
4	17/162	8/9	145/162
5	33/578	16/17	545/578
6	65/2178	32/33	2113/2178
7	129/8450	64/65	8321/8450
8	257/33282	128/129	33025/33282
9	513/132098	256/257	131585/132098
10	1025/526338	512/513	525313/526338

Tab. 1: Beispiele

In der Spalte für b_n sehen wir die Verallgemeinerung des Satzes von Haga. Offenbar ist:

$$b_n = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+1} \tag{18}$$

Weiter ist:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 1 \tag{19}$$

In der Tabelle 2 sind die Seitenverhältnisse in ganzen Zahlen angegeben. Der Querstrich deutet diese Erweiterung an. Es sind alles pythagoreische Dreiecke. Zusätzlich sind die Parameter u und v dieser pythagoreischen Dreiecke angegeben.

n	$\overline{a}_n$	$\overline{b}_n$	$\overline{c}_n$	u_n	v_n
1	3	4	5	2	1
2	5	12	13	3	2
3	9	40	41	5	4
4	17	144	145	9	8
5	33	544	545	17	16
6	65	2112	2113	33	32
7	129	8320	8321	65	64
8	257	33024	33025	129	128
9	513	131584	131585	257	256
10	1025	525312	525313	513	512

Tab. 2: Ganzzahlige Seitenverhältnisse

Zur Erinnerung: Zu teilerfremden $u > v > 1$, $\mathrm{mod}(u-v, 2) = 1$, sind

$$\overline{a} = u^2 - v^2, \quad \overline{b} = 2uv, \quad \overline{c} = u^2 + v^2 \tag{20}$$

die Seiten eines primitiven pythagoreischen Dreieckes. Diese Parametrisierung ist eindeutig.

5 Feststellungen

Auf Grund der Tabelle 2 vermuten wir:

$$u_n = 2^{n-1} + 1, \quad v_n = 2^{n-1} \tag{21}$$

Weiter ist:

$$a_n = 2^n + 1 = u_n + v_n \tag{22}$$

Durch Nachrechnen zeigt man, dass (22) mit (20) und (21) kompatibel ist.
Die lange Kathete und die Hypotenuse unterscheiden sich nur um 1:

$$c_n = b_n + 1 \tag{23}$$

Die Dreiecke sind also fast gleichschenklig, mit einer vergleichsweise kurzen Basis a_n.

6 Beweis

Wir haben zu zeigen, dass wir bei Fortführung des Faltprozesses eine unendliche Folge von pythagoreischen Dreiecken erhalten. Dazu setzen wir:

$$u_n = 2^{n-1} + 1, \quad v_n = 2^{n-1} \tag{24}$$

Damit lassen sich vermöge (20) die ganzzahligen Werte $\overline{a}_n, \overline{b}_n, \overline{c}_n$ berechnen:

$$\begin{aligned} \overline{a}_n &= 2^n + 1 \\ \overline{b}_n &= 2^{2n-1} + 2^n \\ \overline{c}_n &= 2^{2n-1} + 2^n + 1 \end{aligned} \tag{25}$$

Daraus ergibt sich die Hilfsgröße:

$$\overline{a}_n + \overline{c}_n = 2^n + 1 + 2^{2n-1} + 2^n + 1 = 2^{2n-1} + 2^{n+1} + 2 \tag{26}$$

Für die Berechnung der ursprünglich durch Falten erhaltenen Werte a_n, b_n, c_n müssen die Werte aus (25) so skaliert werden, dass $a_n + c_n = 1$ wird (Seitenlänge des Origami-Papieres). Also:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\overline{a}_n}{\overline{a}_n + \overline{c}_n} = \frac{2^n+1}{2^{2n-1}+2^{n+1}+2} \\ b_n &= \frac{\overline{b}_n}{\overline{a}_n + \overline{c}_n} = \frac{2^{2n-1}+2^n}{2^{2n-1}+2^{n+1}+2} \\ c_n &= \frac{\overline{c}_n}{\overline{a}_n + \overline{c}_n} = \frac{2^{2n-1}+2^n+1}{2^{2n-1}+2^{n+1}+2} \end{aligned} \tag{27}$$

Zu zeigen ist nun folgendes: Die Werte (27) genügen den Rekursionsformeln (13), (16) und (17). Der Autor hat das mit CAS verifiziert.

7 Der Winkel alpha

In der Tabelle 3 sind zusätzlich die der Seite a_n gegenüberliegenden Winkel α_n in ° sowie deren Partialsummen angegeben.

n	$\overline{a}_n$	$\overline{b}_n$	$\overline{c}_n$	α_n	$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$
1	3	4	5	36.86989765°	36.86989765°
2	5	12	13	22.61986495°	59.48976260°
3	9	40	41	12.68038349°	72.17014609°
4	17	144	145	6.732921330°	78.90306742°
5	33	544	545	3.471409177°	82.37447660°
6	65	2112	2113	1.762807993°	84.13728459°
7	129	8320	8321	0.8882888659°	85.02557346°
8	257	33024	33025	0.4458793023°	85.47145276°
9	513	131584	131585	0.2233750757°	85.69482784°
10	1025	525312	525313	0.1117966075°	85.80662445°

Tab. 3: Winkel alpha

Wir sehen, dass diese Winkel in etwa wie eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{2}$ abnehmen. Ich vermute daher, dass die Partialsummenfolge konvergiert.