Hans Walser, [20130317]

Pyramidenoptimierung

1 Die Schulaufgabe

Welche Pyramide mit gegebener Kantenlänge 1 hat den größten Volumeninhalt?

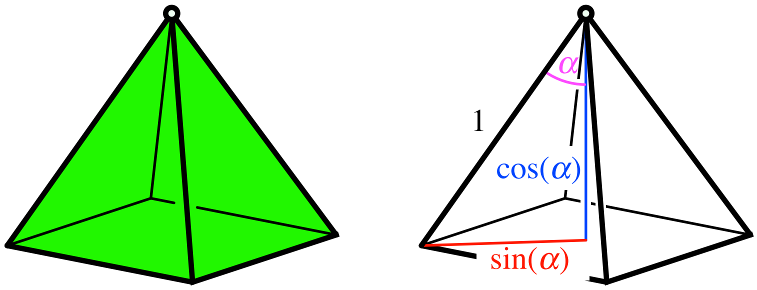

Abb. 1: Pyramide

Als Parameter der Aufgabe verwenden wir den Winkel α zwischen der Pyramidenkante und der Pyramidenhöhe (Abb. 1).

Für das Volumen $V(\alpha)$ erhalten wir:

$$V(\alpha) = \tfrac{2}{3}\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)$$

Damit wird:

$$\tfrac{dV}{d\alpha}(\alpha) = \tfrac{2}{3}\left(2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha)\right) = \tfrac{2}{3}\left(2\sin(\alpha) - 3\sin^3(\alpha)\right) \overset{!}{=} 0$$

Wir erhalten die nichttriviale positive Lösung:

$$\sin(\alpha) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad \alpha = \arcsin\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) \approx 54.7356°$$

2 Diskussion der Lösung

Der Winkel $2\alpha = 2\arcsin\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) \approx 109.4712°$ ist ein alter Bekannter. Es ist zum Beispiel der Diederwinkel des Oktaeders oder der stumpfe Schnittwinkel der Diagonalen im DIN-Rechteck (Abb. 2).

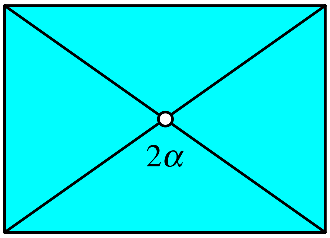

Abb. 2: Diagonalen im DIN-Rechteck

Zwei gegenüberliegende Würfelkanten spannen ein DIN-Rechteck auf. Daher finden wir die optimale Pyramide auch im Würfel (Abb. 3).

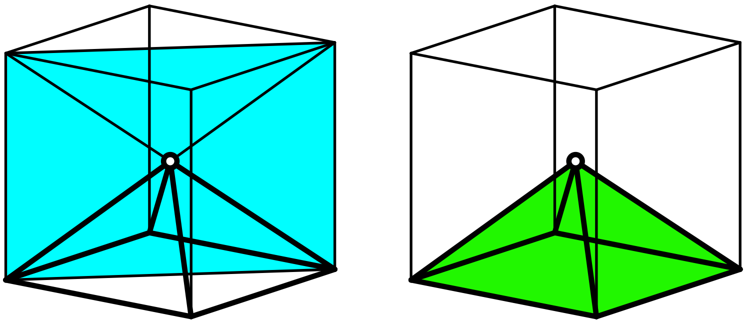

Abb. 3: Optimale Pyramide und Würfel

Der Umkegel unserer optimalen Pyramide ist der Kegel mit größtem Volumeninhalt bei gegebener Mantellänge.

3 Andere Dimensionen

In der Dimension n denken wir uns die Pyramide mit einem $(n-1)$-d-Hyperwürfel als Basis. Für das Volumen $V(\alpha)$ erhalten wir entsprechend:

$$V(\alpha)=\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^{n-1}\sin^{n-1}(\alpha)\cos(\alpha)$$

Damit wird:

$$\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha)&=\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^{n-1}\left((n-1)\sin^{n-2}(\alpha)\cos^2(\alpha)-\sin^n(\alpha)\right)\\&=\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{2}{\sqrt{n-1}}\right)^{n-1}\left((n-1)\sin^{n-2}-n\sin^n(\alpha)\right)\overset{!}{=}0\end{aligned}$$

Wir erhalten die nichttriviale positive Lösung:

$$\sin(\alpha) = \sqrt{\tfrac{n-1}{n}}, \quad \alpha = \arcsin\left(\sqrt{\tfrac{n-1}{n}}\right)$$

Im n-d-Hyperwürfel mit dem Umsphärenradius 1 spannen zwei diametrale Kanten ein Rechteck gemäß Abbildung 4 auf.

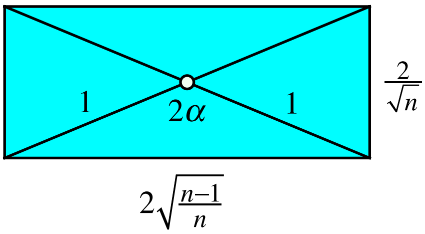

Abb. 4: Rechteck

Der Winkel 2α ist der stumpfe Diagonalenschnittwinkel dieses Rechtecks.

Die Tabelle zeigt die ersten numerischen Lösungen:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	45°	54.7356°	60°	63.4349°	65.9052°	67.7923°	69.2952°	70.5288°	71.5651°

Für n = 2 ergibt sich als Teil des Quadrates das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck (Abb. 5).

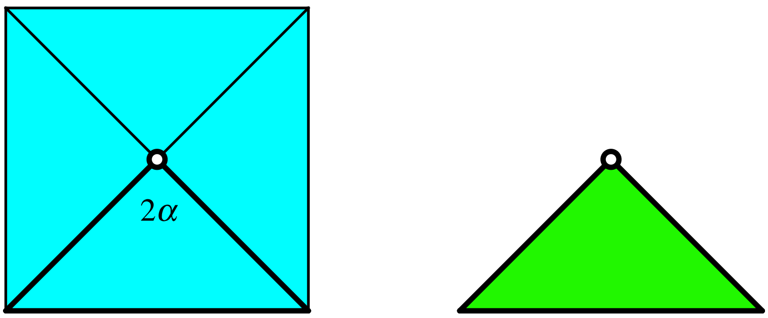

Abb. 5: Zweidimensionaler Fall

Für n = 4 sieht es spannend aus (Abb. 6). Der stumpfe Diagonalenschnittwinkel im Rechteck misst in Wirklichkeit 120° aber in unserer Darstellung wird er zu 135° verzerrt.

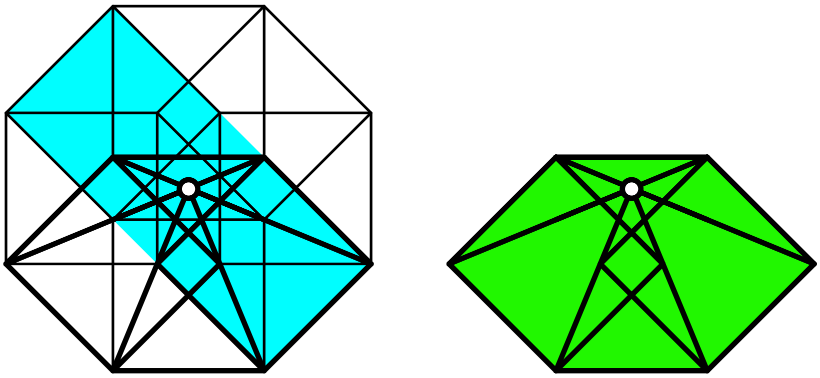

Abb. 6: Im 4d-Raum

Für $n = 5$ erhalten wir für α den spitzen Diagonalenschnittwinkel im Goldenen Rechteck, vgl. [Walser 2013]. Das kann mit Nachrechnen gezeigt werden. Erstaunen tut es nicht, da die Zahl 5 mit dem Goldenen Schnitt zu tun hat.

Für $n = 9$ erhalten wir für α den spitzen Diagonalenschnittwinkel im DIN-Rechteck. Auch dies kann mit Nachrechnen gezeigt werden. Das Resultat ist aber erstaunlich.

Literatur

[Walser 2013] Walser, Hans: Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-85-1