Hans Walser, [20170320]

Prozentuale Veränderungen

Anregung: A. B., F.

1 Worum geht es?

Ausgehend von einer Prozent-Aufgabe werden Probleme mit prozentualen Veränderungen besprochen.

2 Die Aufgabe

Die Aufgabe entstammt dem COSH-Mindestanforderungskatalog [COSH] für MINT-Studiengänge (Aufgabe 34):

Wie verändert sich der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn eine der Katheten um 20 % verkürzt und die andere um 20 % verlängert wird?

3 Besprechung der Aufgabe

3.1 Kompensation?

„Verkürzen“ und „verlängern“ kompensieren sich nicht. Dies wird sofort klar, wenn wir die Aufgabe dynamisch denken und mit 100% arbeiten. Dann wird die Fläche null.

3.2 Grafische Lösung

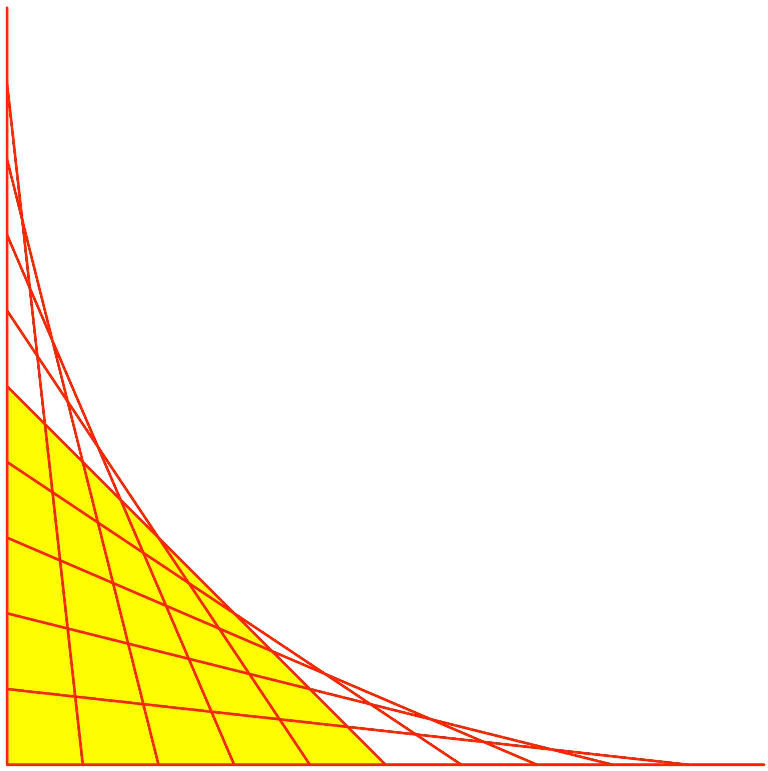

Abb. 2: Grafische Lösung

In der Abbildung 1 starten wir mit einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck (gelb). Die Katheten werden um 20%, 40%, 60%, 80%, 100% verlängert und verkleinert. Man „sieht“, wie die Dreiecke flächenmäßig kleiner werden. In den Grenzfällen ist der Flächeninhalt null.

Die Enveloppe der Hypotenusen hat die Gleichung (Kathetenlänge des gelben Dreiecks gleich ½):

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \tag{1}$$

Sie liegt auf einer (schrägen) Parabel, deren Achse die Symmetrieachse der Gesamtfigur ist.

3.3 Schulmäßige Lösung

Wir arbeiten mit Faktoren. Verkürzen um 20% bedeutet einen Faktor 0.8, verlängern um 20% einen Faktor 1.2. Nun ist 0.8 × 1.2 = 0.96. Der Flächeninhalt wird also um 4% kleiner.

Allgemein:

$$\left(1-\tfrac{p}{100}\right)\left(1+\tfrac{p}{100}\right)=1-\tfrac{p^2}{10000} \tag{1}$$

In anderer Darstellung mit $x=\tfrac{p}{100}$:

$$(1-x)(1+x)=1-x^2 \tag{2}$$

Der Flächeninhalt wird also auf jeden Fall kleiner.

3.4 Allgemeines Dreieck

Die Aufgabe „hängt“ nicht am rechtwinkligen Dreieck. Wir können, ohne am Resultat etwas zu ändern, verallgemeinern wie folgt:

Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Dreiecks, wenn eine Seite um 20 % verkürzt und eine andere Seite um 20 % verlängert wird?

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dies einzusehen.

Statt mit einem Dreieck können wir auch mit einem Rechteck oder einem Parallelogramm arbeiten.

4 Im Raum

4.1 Aufgabe

Wie verändert sich das Volumen eines Zylinders, wenn seine Höhe um 20% verkürzt und sein Radius um 20% verlängert wird?

Nun ist $0.8 \times 1.2^2 = 1.152$. Das Volumen wird um 15.2% vergrößert. Andererseits: bei 100% erhalten wir eine flache Scheibe mit dem Volumen null.

Sehen wir das genauer an:

Prozentsatz	0%	20%	40%	60%	80%	100%
Veränderung	0%	15.2%	17.6%	2.4%	–35.2%	–100%

Tab. 1: Veränderungen

In der Gegend von 40% haben wir offenbar die maximal mögliche Vergrößerung des Volumens. Etwas oberhalb von 60% haben wir keine Veränderung. Daher neue Aufgabe:

4.2 Neue Aufgabe

Wir verkürzen die Höhe eines Zylinders um $p\%$ und verlängern den Radius um $p\%$.

a) Für welchen Wert von p wird das Volumen maximal?

b) Für welchen Wert von p ergibt sich *keine* Volumenänderung?

Mit der Schreibweise $x = \frac{p}{100}$ haben wir folgende Funktion zu diskutieren:

$$f(x) = (1-x)(1+x)^2, \quad x \in [0,1] \tag{3}$$

Die Abbildung 2 zeigt den Funktionsgrafen.

Abb. 2: Funktionsgraf

4.3 Kurvendiskussion

Teilaufgabe a): Es ist:

$$f(x)=(1-x)(1+x)^2=-x^3-x^2+x+1 \tag{4}$$

Für die Ableitung erhalten wir:

$$f'(x)=-3x^2-2x+1 \tag{5}$$

Die Ableitung hat die Nullstellen $\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$. Das maximale Volumen erhalten wir für $x=\frac{1}{3}\triangleq 33.33\%$.

Teilaufgabe b): Gesucht sind die Lösungen von:

$$f(x)=1 \tag{6}$$

Wir erhalten die kubische Gleichung:

$$(1-x)(1+x)^2=1 \tag{7}$$

Umgeformt:

$$x\left(x^2+x-1\right)=0 \tag{8}$$

Die Lösungen sind $\left\{0,\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. Die Lösung null ist trivial, wer nichts tut, macht nichts Falsches. Die positive Lösung im zulässigen Bereich ist:

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618\triangleq 61.8\% \tag{9}$$

Dies ist der Goldene Schnitt (Walser 2013).

Die Abbildung 3 zeigt einen beliebigen Originalzylinder (links) und einen veränderten, aber volumengleichen Zylinder.

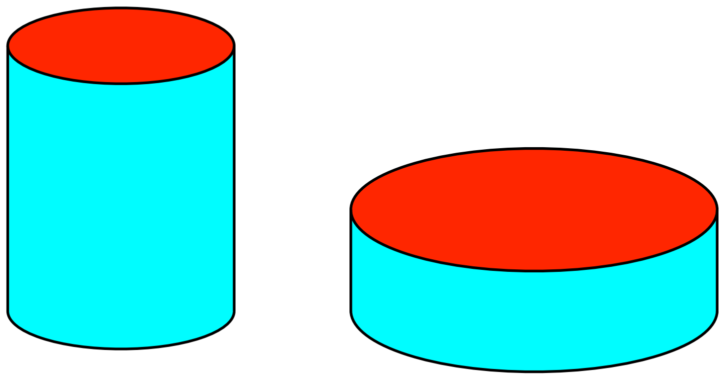

Abb. 3: Volumengleiche Zylinder

Literatur

Walser, Hans (2013): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.

Websites

[COSH] COSH – Cooperation Schule - Hochschule (20.3.2017)

https://lehrerfortbildung-bw.de/bs/bsa/bk/bk_mathe/cosh_neu/

https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/mathematik/bs/bk/cosh/katalog/makv2.pdf