

Hans Walser, [20150808]

Polardarstellung eines regelmäßigen Vielecks

1 Problemstellung

Ein regelmäßiges n -Eck soll in Polarkoordinaten dargestellt werden, also: $(t, r(t))$. Dabei ist t der Polarwinkel, $r(t)$ der Polarabstand.

Gesucht ist die Funktion $r(t)$ in Abhängigkeit der Eckenzahl n .

2 Lösung

Die Funktion

$$r(t) = \frac{1}{\cos\left(\arctan\left(\left|\tan\left(\frac{nt}{4}\right)\right|\right)\frac{4-\pi}{n}\right)}$$

löst das Problem. Für $n = 7$ ergibt sich die Figur der Abbildung 1. Es ist zusätzlich in Rot der Einheitskreis eingezeichnet. Das Siebeneck ist tangential an den Einheitskreis.

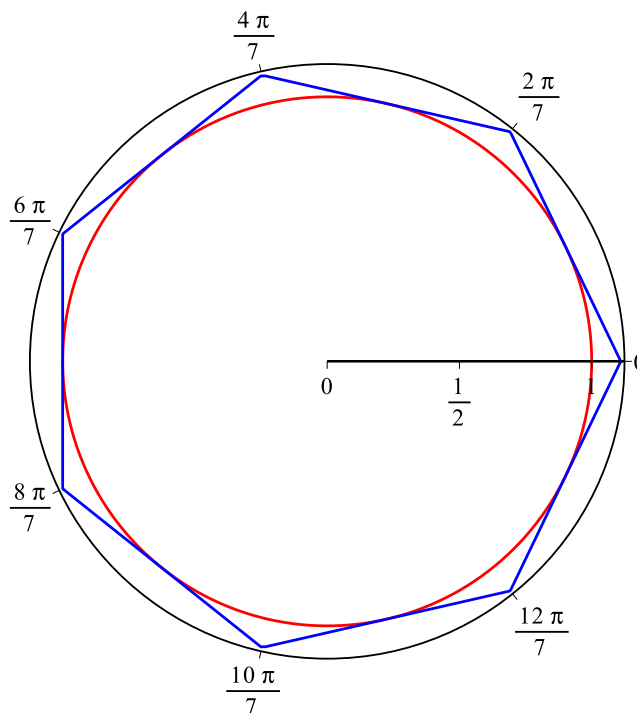
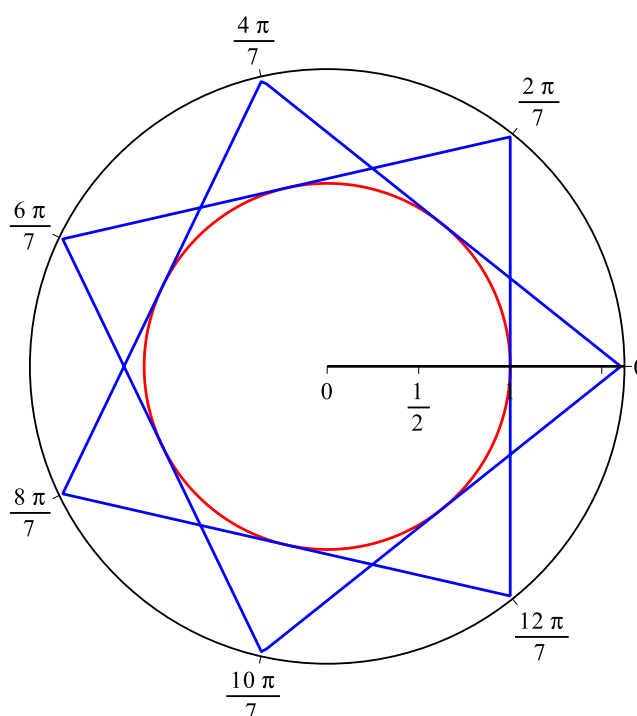


Abb.1: Siebeneck

Der schwarze äußere Kreis ist die zu den Polarwinkeln gehörende runde Achse des Koordinatensystems.

Für $n = \frac{7}{2}$ ergibt sich die Figur der Abbildung 2. Es klappt also auch bei mehreren Umläufen.

**Abb. 2: Zwei Umläufe****3 Analyse der Lösung**

Wir analysieren Schritt für Schritt (von innen nach außen) die Lösungsfunktion

$$r(t) = \frac{1}{\cos\left(\arctan\left(\left|\tan\left(\frac{nt}{4}\right)\right|\right)\frac{4-\pi}{n}\right)}$$

für $t \in [0, 2\pi]$. Die Abbildungen sind für den Fall $n = 7$.

Die Abbildung 3.1 zeigt $\tan\left(\frac{nt}{4}\right)$.

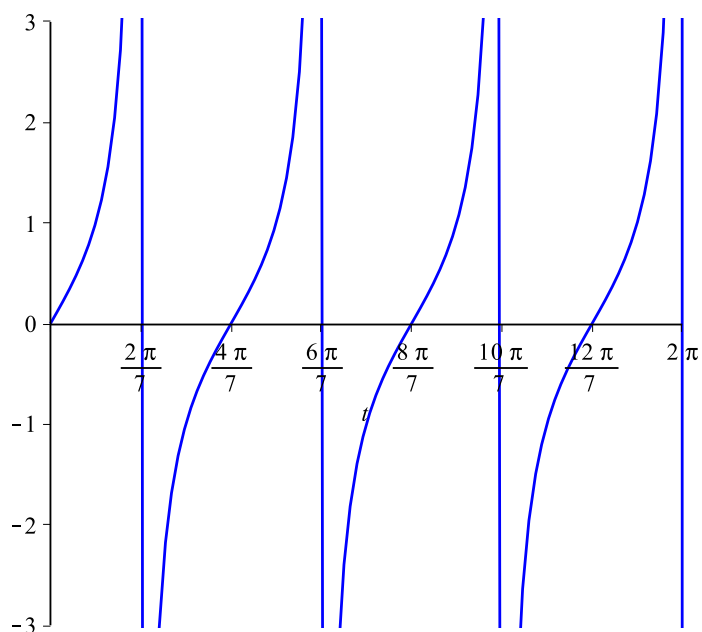


Abb. 3.1: Die Periodizität stimmt

Die Abbildung 3.2 zeigt $\left| \tan\left(\frac{nt}{4}\right) \right|$.

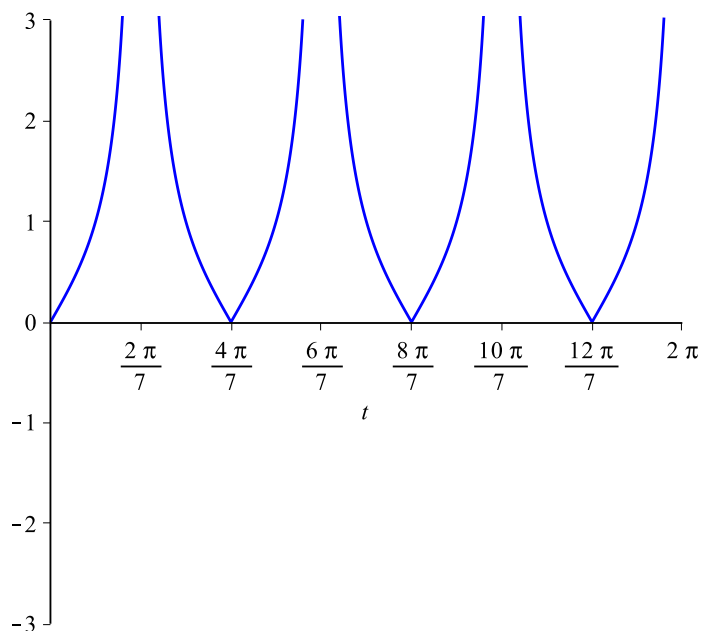


Abb. 3.2: Aufwärts und abwärts

Die Abbildung 3.3 zeigt $\arctan\left(\left|\tan\left(\frac{nt}{4}\right)\right|\right)$. Dies ist der wesentliche Schritt, weil wir so eine periodische Zickzacklinie erhalten.

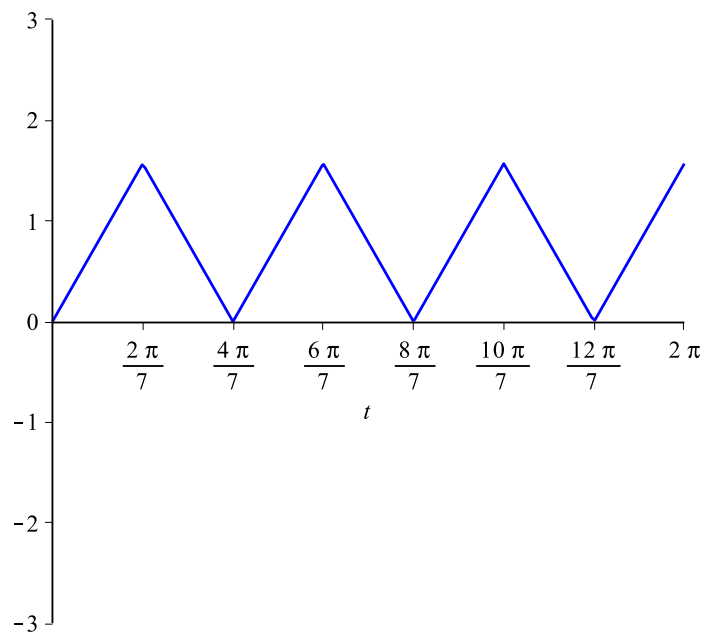


Abb. 3.3: Zickzacklinie

Die Abbildung 3.4 zeigt $\arctan\left(\left|\tan\left(\frac{nt}{4}\right)\right|\right)^{\frac{4}{n}}$.

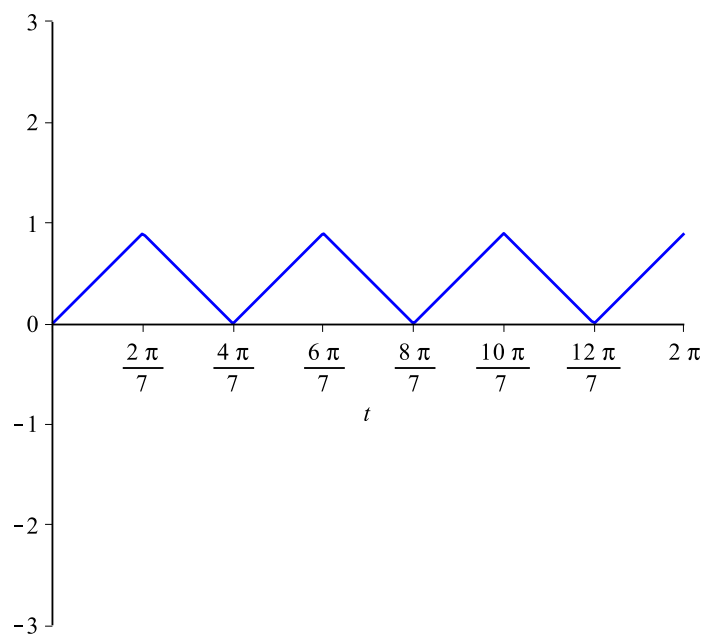


Abb. 3.4: Steigung eins und minus eins

Die Abbildung 3.5 zeigt $\arctan\left(\left|\tan\left(\frac{t}{4}\right)\right|\right)\frac{4}{n} - \frac{\pi}{n}$.

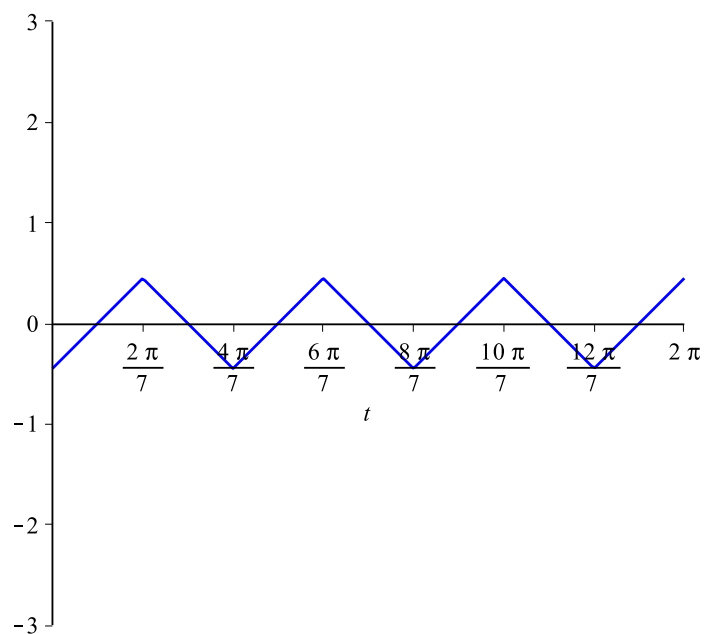


Abb. 3.5: Höhenjustierung

Die Abbildung 3.6 zeigt $\cos\left(\arctan\left(\left|\tan\left(\frac{nt}{4}\right)\right|\right)\frac{4-\pi}{n}\right)$. Die Spitzen weisen nach unten, in der Polardarstellung also nach innen.

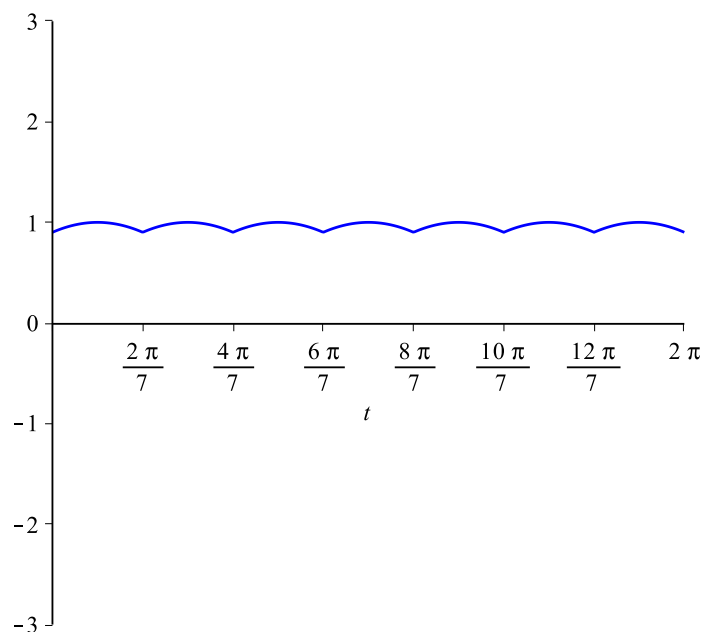


Abb. 3.6: Kosinusbögen

Die Abbildung 3.7 zeigt $r(t) = \frac{1}{\cos\left(\arctan\left(\left|\tan\left(\frac{nt}{4}\right)\right|\right)\frac{4-\pi}{n}\right)}$. Die Spitzen weisen nach oben, in der Polardarstellung also nach außen.

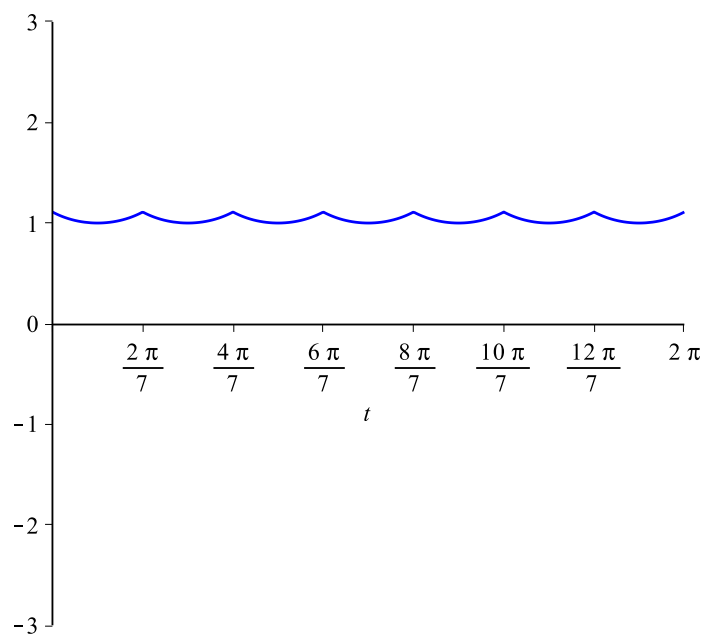
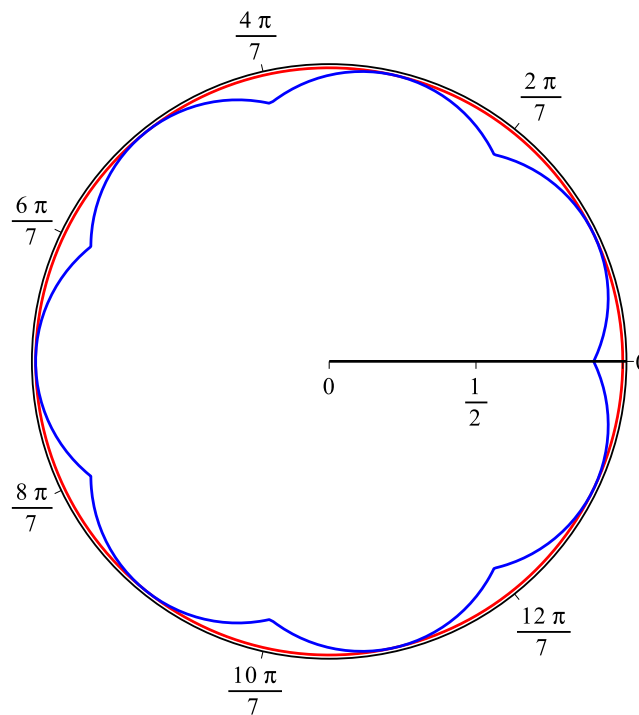


Abb. 3.7: Und nun die Funktion

4 Rosetten

Wenn wir den letzten Schritt nach Abbildung 3.7 weglassen, also mit der Funktion der Abbildung 3.6 arbeiten, ergeben sich Spitzen nach innen. Wir erhalten eine Rosette oder einen n -Pass (Abb. 4).

**Abb. 4: Rosette**

Wir können auch hier mit mehreren Umläufen arbeiten. Im Beispiel der Abbildung 5 sind drei Umläufe eingearbeitet, $n = \frac{7}{3}$. In dieser und den folgenden Abbildungen ist die Orientierung so geändert, dass die Figuren eine senkrechte Symmetrieachse erhalten. Zudem wird das Koordinatensystem weggelassen.

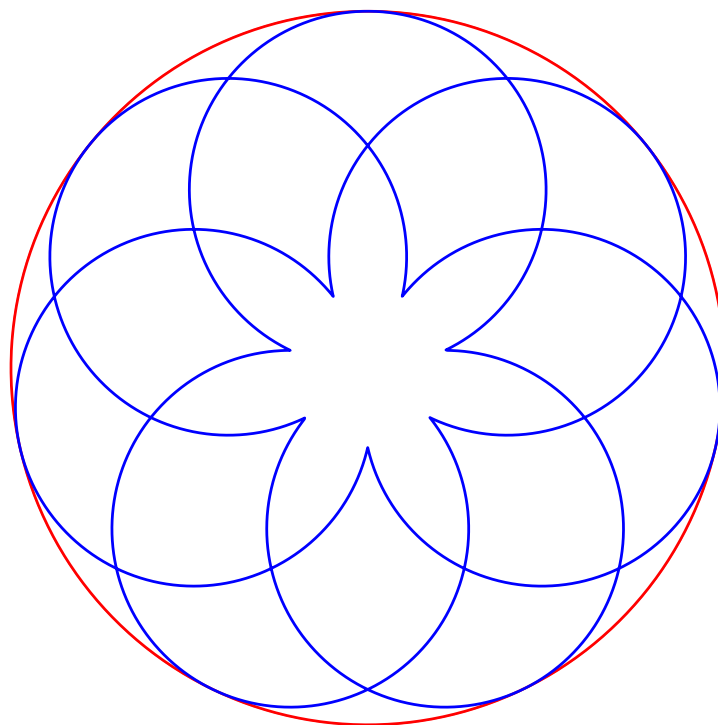


Abb.5: Drei Umläufe

Geometrisch entsteht die Rosette durch Einspiegeln des Sterns $\left\{\frac{7}{3}\right\}$ am Einheitskreis (Abb. 6). Jeder Sternspitze nach außen entspricht eine Rosettenspitze nach innen. Da die Kreisspiegelung winkeltreu (konform) ist, schließen die Sternspitzen nach außen und die Rosettenspitzen nach innen gleiche Winkel ein. Da die Kreisspiegelung möbiuskreistreu ist, sind die Rosettenbögen echte Kreisbögen.

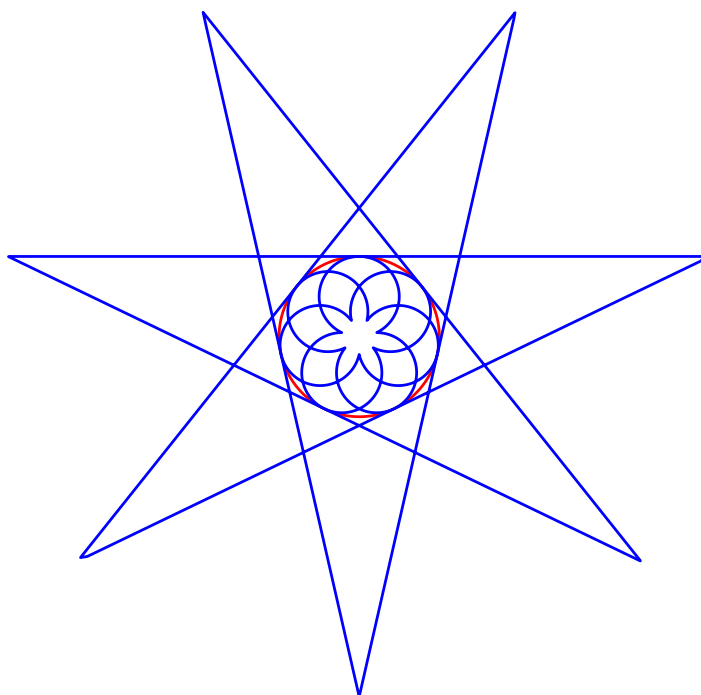


Abb. 6: Kreisspiegelung

Die Abbildung 7 zeigt einen Dreipass, wie er etwa in der gotischen Architektur erscheint.

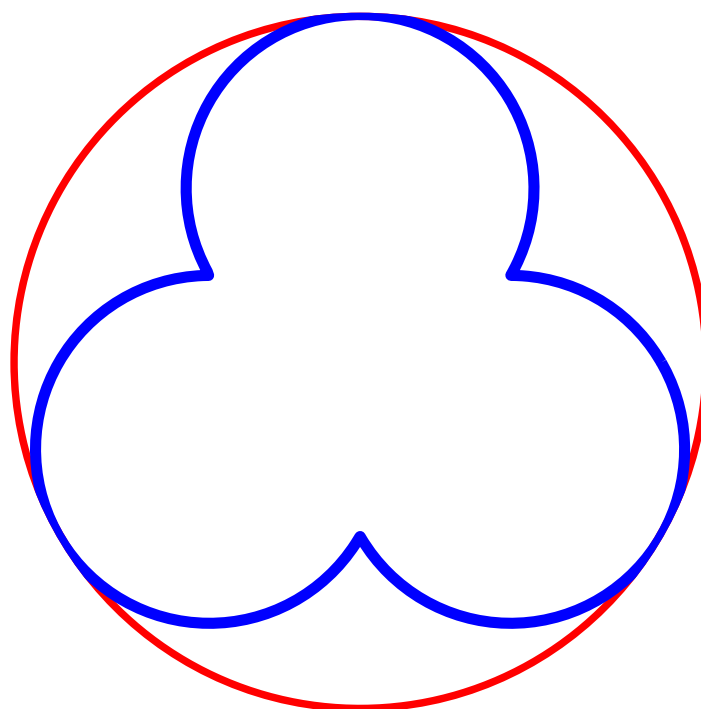


Abb. 7: Dreipass

5 Potenzierte regelmäßige Vielecke

Wir ersetzen die Funktion $r(t)$ durch $(r(t))^p$, $p \in \mathbb{Z}$.

Die Abbildung 8 zeigt das Siebeneck für $p = 2$, die Abbildung 9 für $p = 10$. Die Seiten sind zunehmend nach außen gebogen.

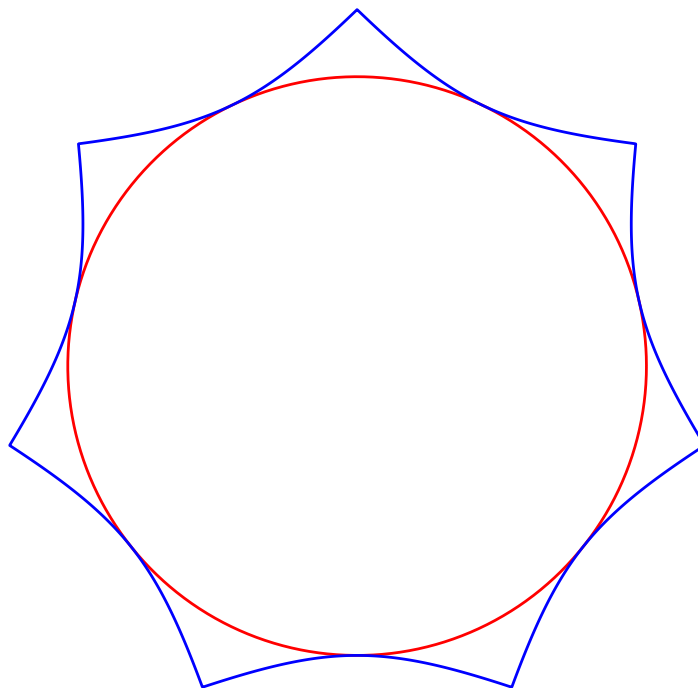


Abb. 8: Zweite Potenz. „Quadrat“

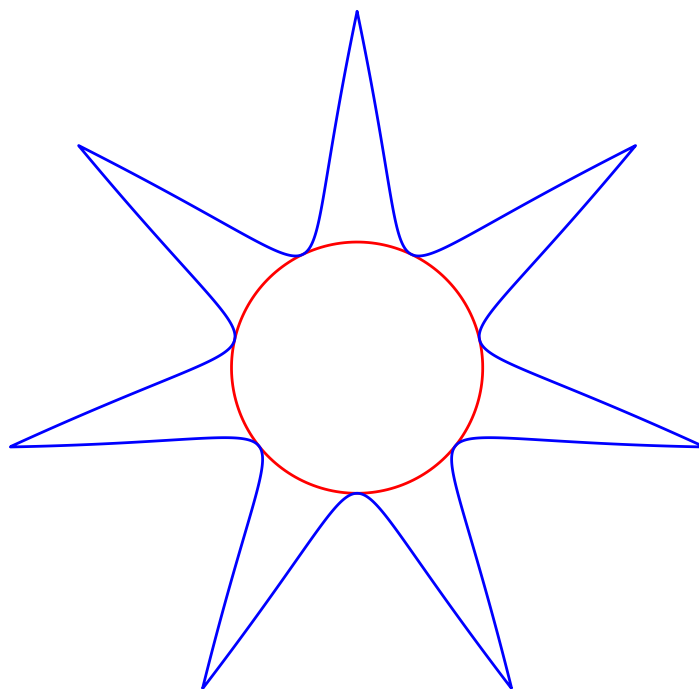


Abb. 9: Zehnte Potenz

Die Abbildungen 10 und 11 zeigen die Situation für $p = -2$ und $p = -10$. Die rosettenbögen sind keine Kreisbögen mehr, sondern die Kreisspiegelbilder der in den Abbildungen 8 und 9 nach außen gebogenen Seiten.

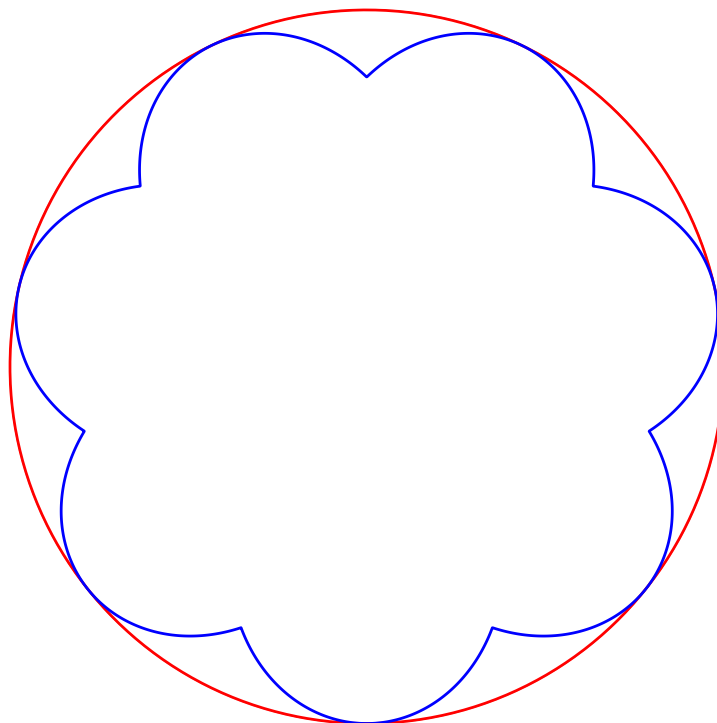


Abb. 10: Minus zweite Potenz

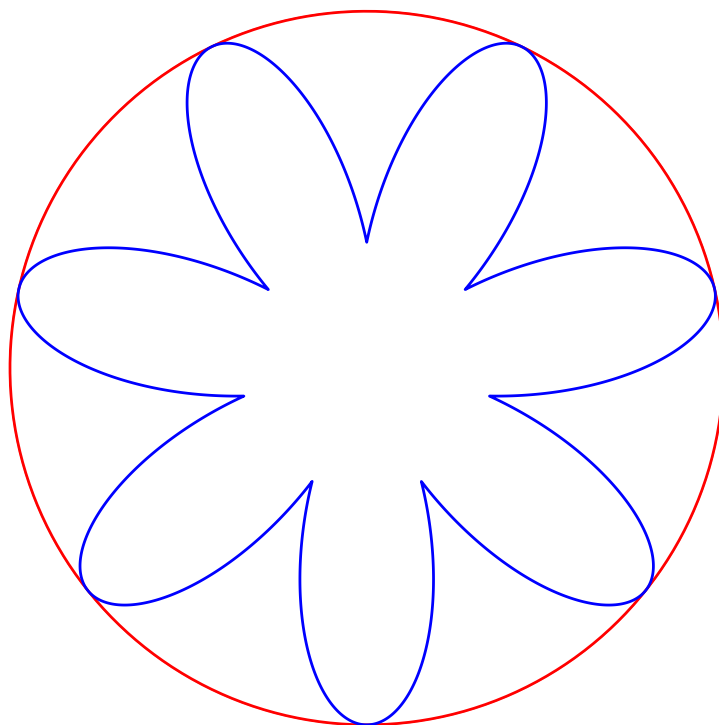


Abb. 11: Minus zehnte Potenz

Die Abbildungen 12 und 13 zeigen die Situation für $p = -30$ und $p = -100$.

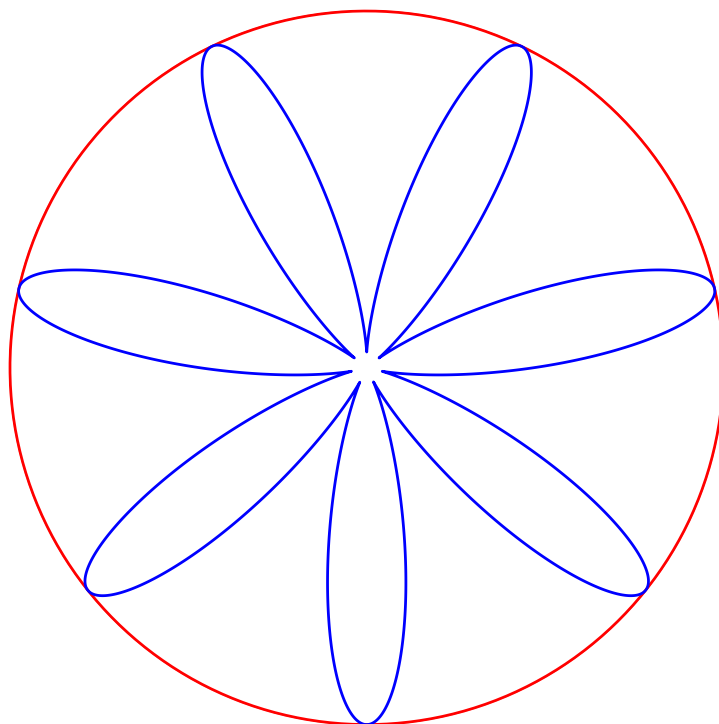
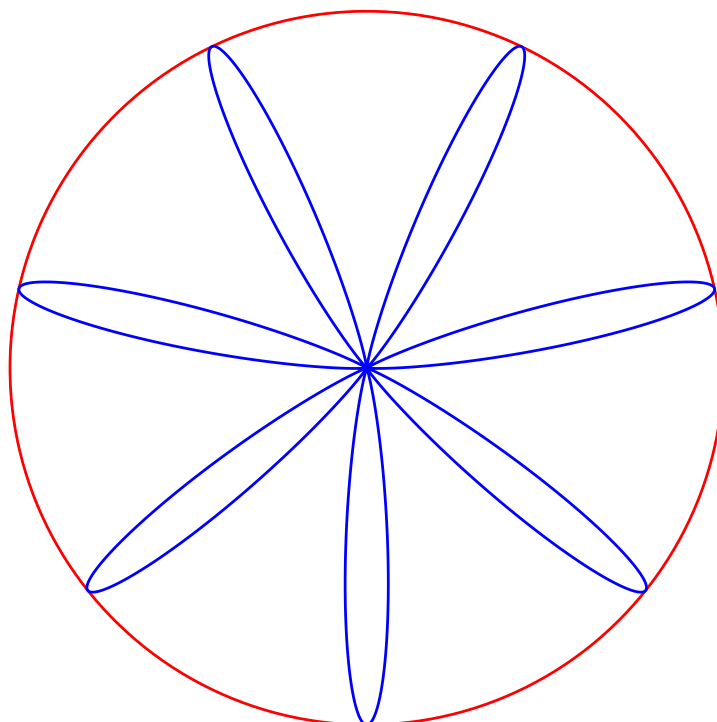


Abb. 12: $p = -30$

**Abb. 13: $p = -100$**

Die gewöhnlichen Rosetten gehören zur minus ersten Potenz. Die nullte Potenz ergibt den Einheitskreis.

6 Spiralen

Wir ersetzen die Funktion $r(t)$ durch $(r(t))^{at}$. Für $a = 0.3$ und $t \in [0, 6\pi]$ ergibt sich die Figur der Abbildung 14. Die Spitzen liegen auf einer logarithmischen Spirale.

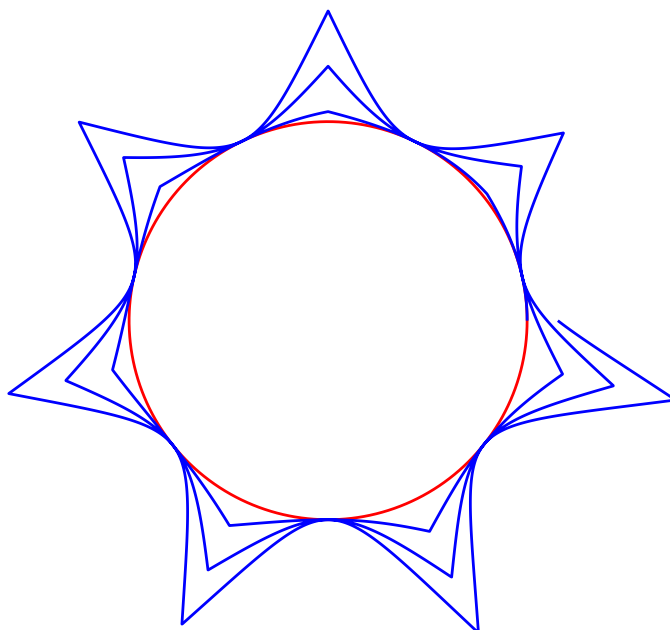


Abb. 14: Logarithmische Spirale

Für $t \in [-6\pi, 6\pi]$ setzt sich die Spirale nach innen ins Rosettenartige fort (Abb. 15).

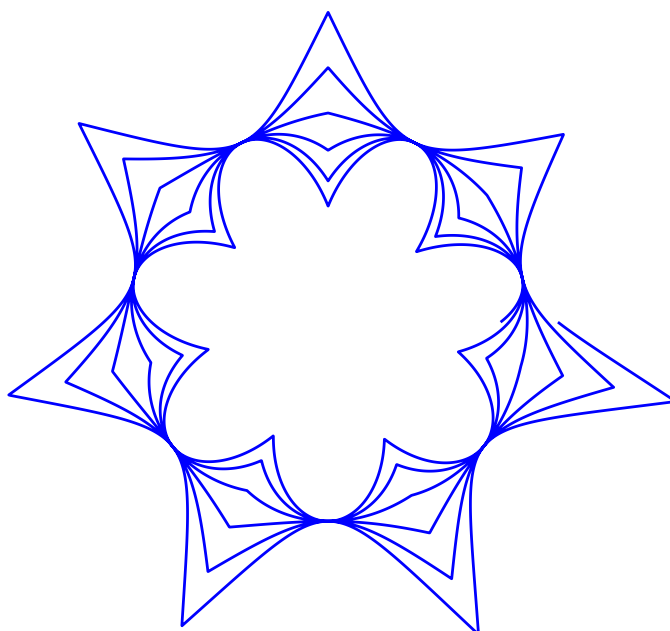


Abb. 15: Fortsetzung nach innen

7 Kugel

Wir arbeiten in sphärischen Koordinaten mit der Darstellung:

$$\left((r(u)r(v))^p, u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), v \in (-\pi, \pi) \right)$$

Für die folgenden Abbildungen wählen wir $n = 6$.

Für $p = 0$ ergibt sich die Kugel (Abb. 16).



Abb. 16: Kugel

Für $p = 1$ ergibt sich eine Figur (Abb. 17), die in einem geeigneten Achsenschnitt (Abb. 18) und im Äquatorschnitt (Abb. 19) je ein Sechseck aufweist. Die Figur ist aber kein Polyeder.

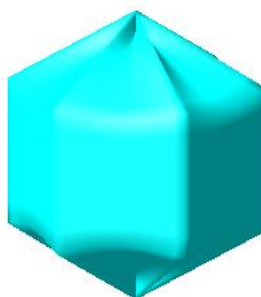


Abb. 17: $p = 1$

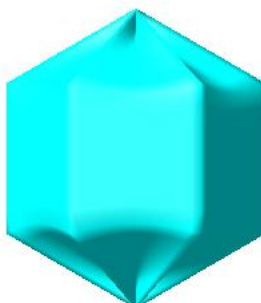


Abb. 18: Umriss ein Sechseck

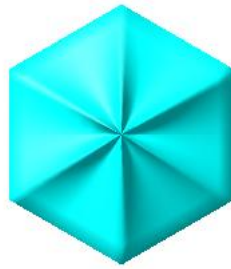


Abb. 19: Äquator ein Sechseck

Für $p = 5$ ergeben sich Spitzen nach außen (Abb. 20). Der Stern hat aber nicht die Symmetrien eines platonischen Körpers.



Abb. 20: $p = 5$

Für $p = -1$ ergibt sich eine 3d-Rosette (Abb. 21).

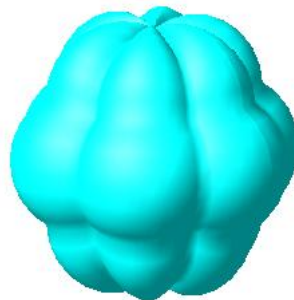


Abb. 21: $p = -1$

Für $p = -5$ ergibt sich was Knubliges (Abb. 22).

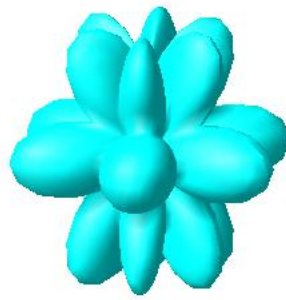


Abb. 22: $p = -5$