Hans Walser, [20141215]

Planetengetriebe

1 Fragestellung

Die Abbildung 1 zeigt das Schema eines Planetengetriebes. Die Figur kann auch als Rollen- oder Kugellager gedeutet werden.

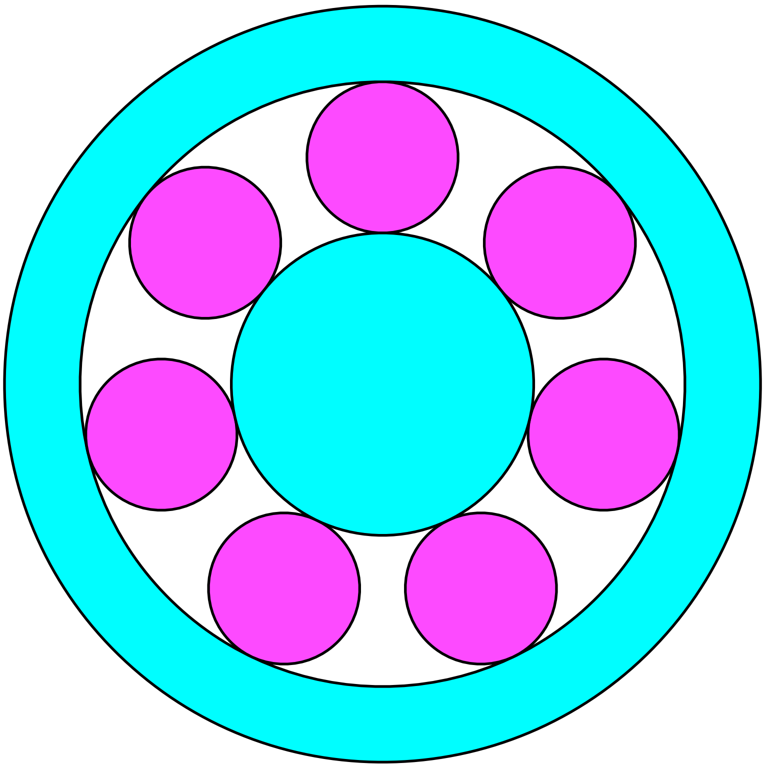

Abb. 1: Planetengetriebes

Der innere blaue Kreis habe den Radius r_1 und die Drehgeschwindigkeit ω_1. Der äußere blaue Kreisring habe den Innenradius r_2 und die Drehgeschwindigkeit ω_2.

a) Wie schnell drehen sich die rosa Kreise um die eigene Achse? Im System Sonne-Erde entspricht dies der Eigendrehung der Erde relativ zu den Fixsternen.

b) Wie schnell drehen die Mittelpunkte der rosa Kreise im blauen System? Im System Sonne-Erde entspricht dies der Drehung der Erde um die Sonne.

2 Bearbeitung

Wir nehmen an, dass die rosa Kreise verlustfrei auf dem inneren Kreis und im äußeren Kreisring abrollen.

2.1 Eigendrehung der rosa Kreise

Die Drehgeschwindigkeit der rosa Kreise um die eigene Achse bezeichnen wir mit $\overline{\omega}$. Die rosa Kreise haben den Radius $r_2 - r_1$.

2.1.1 Berechnung

Wir betrachten einen infinitesimal kleinen Zeitabschnitt dt. Es ist dann:

$$\tfrac{1}{2}(r_2-r_1)(\bar{\omega}-\omega_1)\mathrm{d}t=\tfrac{1}{2}r_2(\omega_2-\omega_1)\mathrm{d}t$$

Daraus ergibt sich:

$$\bar{\omega}=\tfrac{r_2\omega_2-r_1\omega_1}{r_2-r_1}$$

2.1.2 Diskussion

Wir betrachten Grenzfälle.

a) Für $\omega_2=\omega_1$ ist auch $\bar{\omega}=\omega_1=\omega_2$.

b) Für $r_1=0$ ist $\bar{\omega}=\omega_2$.

c) Für $r_1\to r_2$ und $\omega_2\neq\omega_1$ geht der Nenner gegen null und $\bar{\omega}$ wird rasend schnell.

d) Für $\omega_1=0$ (klassische Situation bei Kugellagern) ist $\bar{\omega}=\frac{r_2\omega_2}{r_2-r_1}=\omega_2\frac{r_2}{r_2-r_1}>\omega_2$. Die rosa Kreise drehen also schneller als der äußere Kreisring.

2.2 Drehung der Mittelpunkte

Die Drehgeschwindigkeit der Mittelpunkte der rosa Kreise im blauen System bezeichnen wir mit $\tilde{\omega}$.

2.2.1 Berechnung

Wir betrachten wiederum einen infinitesimal kleinen Zeitabschnitt dt. Es ist dann:

$$\tfrac{1}{2}(r_1+r_2)\tilde{\omega}=\tfrac{1}{2}(r_1\omega_1+r_2\omega_2)$$

Daraus ergibt sich:

$$\tilde{\omega}=\tfrac{r_1\omega_1+r_2\omega_2}{r_1+r_2}$$

Die Drehgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ ist also das mit den Radien r_1 und r_2 gewichtete Mittel der beiden Drehgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 .

2.2.2 Diskussion

a) Für $\omega_2=\omega_1$ ist auch $\tilde{\omega}=\omega_1=\omega_2$.

b) Für $r_1=0$ ist $\tilde{\omega}=\omega_2$.

c) Für $r_1=r_2$ ist $\tilde{\omega}=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$. Das ist zwar nicht sinnvoll, aber richtig.

d) Für $\omega_1=0$ (klassische Situation bei Kugellagern) ist $\tilde{\omega}=\frac{r_2\omega_2}{r_1+r_2}=\omega_2\frac{r_2}{r_1+r_2}<\omega_2$. Die Mittelpunkte der rosa Kreise drehen langsamer als der äußere Kreisring.